Die Kurve $y = \cos x$ wird in Richtung der y-Achse verschoben, bis sie die Kurve $y = \sin x$ im Intervall $0 \le x \le \pi$ berührt.

a) Bestimmen Sie den Berührungspunkt.

b) Berechnen Sie die Fläche, welche von der y-Achse und den beiden sich berührenden Kurven bis zum Berührungspunkt eingeschlossen wird.

[TSME, Matur BDE, 1982]

Ansatz für die verschobene Kurve: $y = \cos x + a$

Berührung heisst: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \cos x + a = \sin x \qquad (1)$

und

$f'(x) = g'(x) \quad \Rightarrow \quad -\sin x = \cos x \qquad (2)$

Aus (2) lässt sich x berechnen:

$$-\sin x = \cos x \quad \Big| : (-\cos x)$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$
$$\tan x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{oder} \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

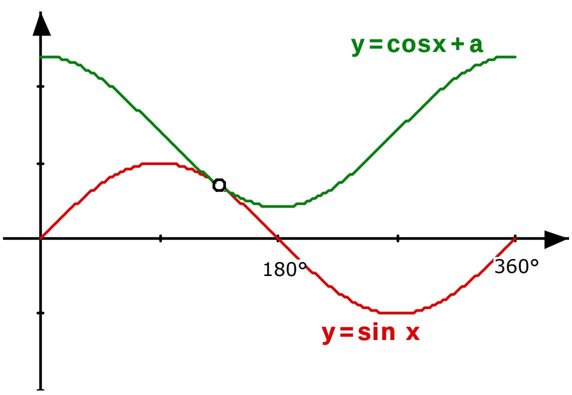
Die 2. Lösung ergäbe eine Verschiebung in Richtung der negativen y-Achse.

Die 1. Lösung setzen wir in (1) ein und erhalten:

$$\cos\tfrac{3\pi}{4} + a = \sin\tfrac{3\pi}{4}$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$a = \sqrt{2}$$

Der Berührungspunkt ist:

$$P\left(\tfrac{3\pi}{4} \;\middle|\; \sin\tfrac{3\pi}{4}\right) = P\left(\tfrac{3\pi}{4} \;\middle|\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



Berechnung der Fläche:

$$A = \int_0^{0.75\pi} \left(\sqrt{2} + \cos x - \sin x\right) dx = \left[\sqrt{2}x + \sin x + \cos x\right]_0^{0.75\pi}$$

$$= \left(\sqrt{2} \cdot 0.75\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(0 + 1 - 0\right) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} - 1$$