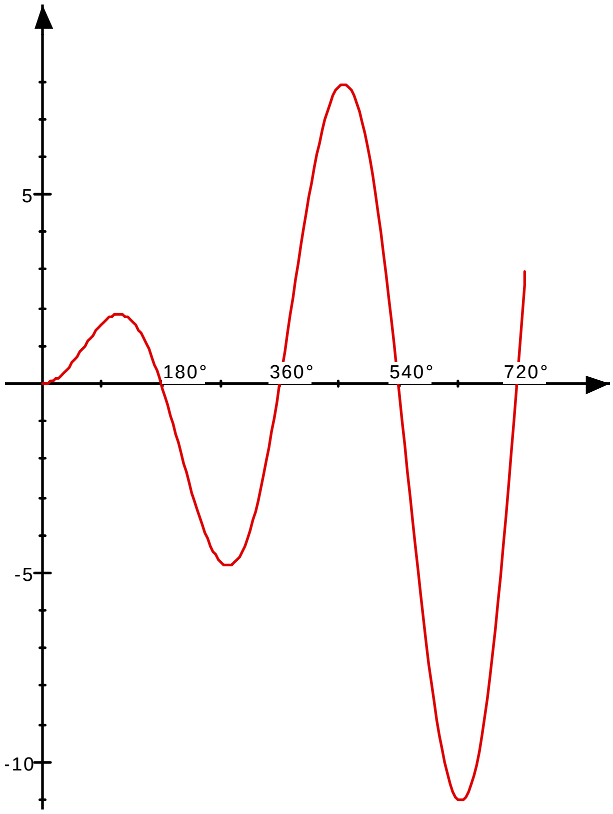
Zeigen Sie, dass die Flächeninhalte, welche im ersten Quadranten zwischen der x-Achse und dem Graph der Funktion $y = x \cdot \sin x$ liegen, eine arithmetische Folge bilden.

[TSME 1984]; Teilaufgabe

---




**Schnittpunkte mit der Achse:**

$$x \cdot \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } \sin x = 0$$

$$x = k \cdot 180^{o} \quad \text{mit } k \in Z$$

Die Stammfunktion von $y = x \cdot \sin x$ findet man mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

$$\int \sin x \cdot x \, dx = -\cos x \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1 \, dx$$

Also $F(x) = -x \cos x + \sin x$

Nun berechnen wir ein paar Flächen:

$$A_1 = \left[\sin x - x\cos x\right]_0^{\pi} = (0+\pi) - (0-0) = \pi$$

$$-A_2 = \left[\sin x - x\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = (0-2\pi) - (0+\pi) = -3\pi \qquad \Rightarrow \quad A_2 = 3\pi$$

$$A_3 = \left[\sin x - x\cos x\right]_{2\pi}^{3\pi} = (0+3\pi) - (0-2\pi) = 5\pi$$

$$-A_4 = \left[\sin x - x\cos x\right]_{3\pi}^{4\pi} = (0-4\pi) - (0+3\pi) = -7\pi \qquad \Rightarrow \quad A_4 = 7\pi$$

Es ist offensichtlich, dass die Flächen $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \ldots$ eine arithmetische Folge mit der Differenz $2\pi$ bilden.