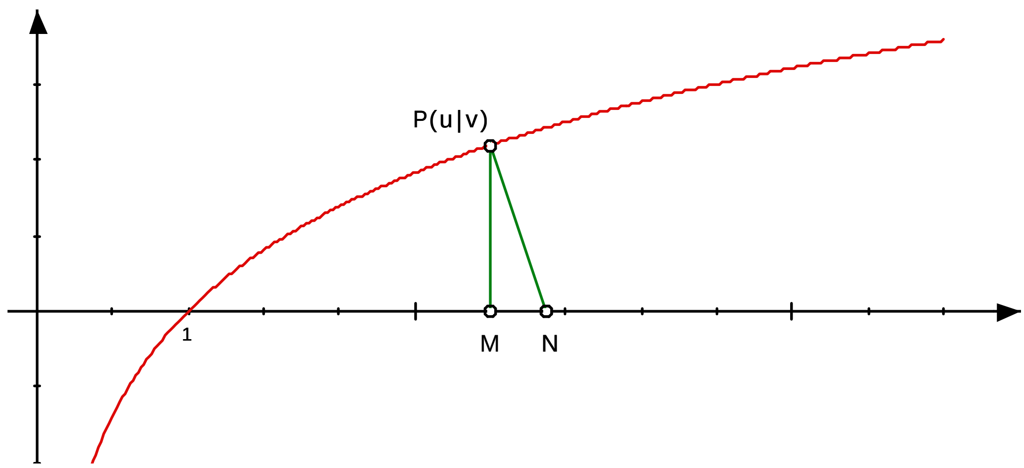
Im Punkte P (u|v) (v>1) der Kurve f: $y = \ln x$ werden die Parallele zur y-Achse und die Kurvennormale gezeichnet. Diese beiden Geraden begrenzen zusammen mit der x-Achse ein Dreieck. Dieses soll maximalen Flächeninhalt haben. Welche Koordinaten hat in diesem Falle der Punkt P?



Wir benötigen die Gleichung der Normalen und ihren Schnittpunkt mit der x-Achse.

Sie geht durch $P(u|v) = (u|\ln u)$ und hat die Steigung $m = -u$ (Tangentensteigung: $m = \frac{1}{u}$)

Damit erhalten wir die Gleichung: $y - \ln u = -u(x-u)$ in der wir $y = 0$ setzen.

$$0 - \ln u = -u(x-u)$$

$$\frac{\ln u}{u} = x - u$$

$$u + \frac{\ln u}{u} = x$$

Koordinaten von: $P(u|v)$ $M(u|0)$ $N\left(u + \frac{\ln u}{u} \middle| 0\right)$

Katheten des Dreiecks: $\overline{MP} = \ln u$, $\overline{MN} = u + \frac{\ln u}{u} - u = \frac{\ln u}{u}$

Fläche des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln u}{u} \cdot \ln u = \frac{(\ln u)^2}{2u}$

$$A' = \frac{2\ln u \cdot \frac{1}{u} \cdot 2u - 2 \cdot (\ln u)^2}{4u^2} = 0$$

$$2\ln u \cdot \frac{1}{u} \cdot 2u - 2 \cdot (\ln u)^2 = 0$$

$$4\ln u - 2(\ln u)^2 = 0$$

$$2\ln u \cdot (2 - \ln u) = 0$$

$\ln u = 0$

$u = 1$ Minimum

$\ln u = 2$

$u = e^2$ $v = 2$ Maximum

Dreiecksfläche maximal für $\mathbf{P\left(e^2 \mid 2\right)}$