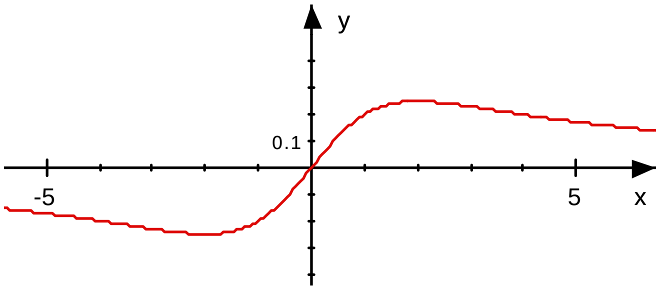
Zeigen Sie, dass $F(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+4}\right)$ eine Stammfunktion von f: $y = \frac{x}{x^2+4}$ ist und bestimmen Sie γ so, dass die Fläche zwischen der Kurve f und der x-Achse im Bereich $0 \le x \le \gamma$ den Inhalt $\ln(1.25) = 0.223...$ besitzt.

[Matur TSME 02, Aufgabe 7b]



Der 1. Teil lässt sich auf zwei Arten lösen:

a) $F(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+4}\right)$ wird abgeleitet:

$$F(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+4}\right) = \ln(x^2+4)^{0.5} = 0.5 \cdot \ln(x^2+4)$$

$$F'(x) = 0.5 \cdot \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+4} = f(x)$$

b) $y = \frac{x}{x^2+4}$ wird (mit Substitution) integriert:

$$x^2+4 = u$$

$$2x = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \tfrac{1}{2}\ln u = \ln u^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{u} = \ln\sqrt{x^2+4}$$

$$x\,dx = \frac{du}{2}$$

Flächenberechnung: $\ln 1.25 = \int_0^{\gamma} \frac{x}{x^2+4}\,dx = \ln\sqrt{x^2+4}\,\Big|_0^{\gamma} = \ln\sqrt{\gamma^2+4} - \ln\sqrt{4}$

$$\begin{aligned}
\ln\sqrt{\gamma^2+4} &= \ln 1.25 + \ln 2 \\
&= \ln 2.5 \\
\sqrt{\gamma^2+4} &= 2.5 \\
\gamma^2+4 &= 6.25 \\
\gamma^2 &= 2.25 \\
\gamma &= 1.5 \quad \text{da} \quad \gamma > o
\end{aligned}$$