[Städtisches Gymnasium Bern, Typus B, 1963]

a) Untersuchen Sie die Funktion $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

Insbesondere werden verlangt: Verhalten der Funktion bei $x=0$ und $x \to \infty$; Nullstellen, Maxima, Minima, Wendepunkte; Graph (Einheit 5cm)

b) Berechnen Sie das Flächenstück zwischen den Nullstellen.

---

lnx ist bekanntlich für $x = 0$ nicht definiert; die Zusatzfunktion $y = 0$ für $x = 0$ füllt die Lücke bei Null mit einem passenden Wert.

Für $x \to 0$ gilt: $y \to 0$
$x \to \infty$ gilt: $y \to \infty$

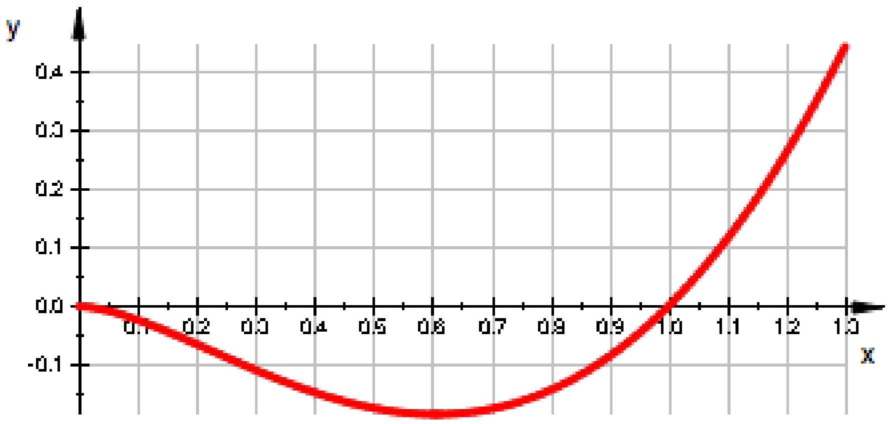
Nullstellen: $f(x) = x^2 \cdot \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Extrema: $f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1) = 0$

$x_1 = 0 \quad$ oder: $\quad 2 \ln x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad y_2 = -\frac{1}{2e}$

Der Kontext zeigt, dass es sich um ein Minimum handelt.

Wendepunkt: $f''(x) = 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1.5}$



Die Funktion lässt sich mit partieller Integration integrieren, man findet sie aber auch in der Formelsammlung (Seite 44 oben):

Dort steht: $\int x^s \ln x \, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\ln x - \frac{1}{s+1}\right)$

Bei unserm Beispiel ist $s = 2$:

$$-A = \int_0^1 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{3}\right) - 0 = -\frac{1}{9}$$

Der Inhalt des Flächenstücks ist also $A = \frac{1}{9}$