GEBROCHENE RATIONALE FUNKTION

VORBEREITUNGEN

a) Algebraische Umformungen

Wir brauchen die Gleichung (so sich das machen lässt) in zwei Formen:

$$y = \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 2x} = \frac{(x-5)(x+4)}{x(x-2)}$$

Diese Form eignet sich für das Bestimmen von
1. Nullstellen
2. Polen

Diese Form ist notwendig für
- Die Ableitung
- Das Verhalten für $x \to \pm\infty$

Wenn der Grad des Zählers gerade um 1 grösser ist, benötigen wir auch die ausdividierte Form (Genaueres dazu folgt später)

$$y = \frac{x^2 - 1}{x} = (x^2 - 1) : x = x - \frac{1}{x}$$

b) Berechnung der Ableitung y‘

c) Eventuell Berechnung der Ableitung y‘‘ (aufwendig und oft nicht sehr wichtig)

Eine besonders wichtige Rolle spielen bei den gebrochenen rationalen Funktionen die Pole und das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

Pole

Für x-Werte, für die der Nenner Null wird, ist die Funktion nicht definiert.
An dieser Stelle hat die Funktion eine Unendlichkeitsstelle einen Pol.

Wir zeichnen an dieser Stelle eine senkrechte Gerade (grün gestrichelt), der sich die Kurve anschmiegt.

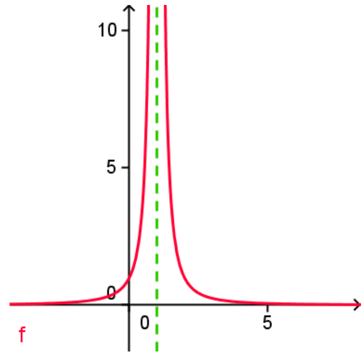
Prinzipiell sind vier Varianten denkbar:

a) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$

Pol bei $x = 1$

$$y = \frac{1}{(1 \pm h - 1)^2} = \frac{1}{h^2} \rightarrow +\infty \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

Gerader Pol ohne Vorzeichenwechsel

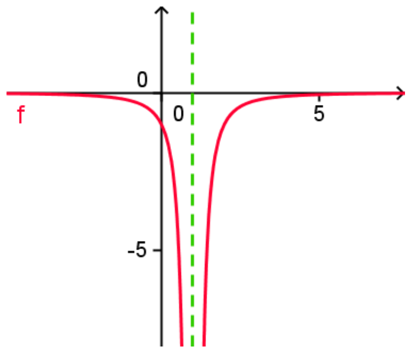


b) $y = \frac{-1}{(x-1)^2}$

Pol bei $x = 1$

$$y = \frac{-1}{(1 \pm h - 1)^2} = \frac{-1}{h^2} \rightarrow -\infty \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

Gerader Pol ohne Vorzeichenwechsel

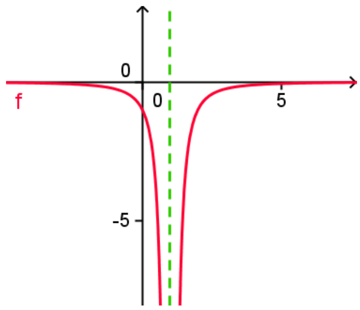


c) $y = \frac{x}{x-2}$

Pol bei $x = 2$

$$y = \frac{2}{2 \pm h - 2} = \frac{2}{\pm h} = \pm\frac{2}{h} \rightarrow \pm\infty \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

Ungerader Pol mit Vorzeichenwechsel

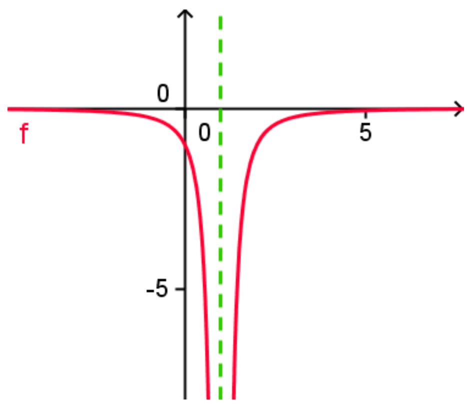


d) $y = \frac{x}{2-x}$

Pol bei $x = 2$

$$y = \frac{2}{2-(2 \pm h)} = \frac{2}{\mp h} = \mp\frac{2}{h} \rightarrow \mp\infty \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

Ungerader Pol mit Vorzeichenwechsel



VERHALTEN FÜR $x \to \pm\infty$

Wir vereinfachen den Bruch und lassen im Zähler und im Nenner je nur das Glied mit dem höchsten Grad stehen (Ausnahme: c)). Diesen vereinfachten Bruch kürzen wir und betrachten seinen Grenzwert für $x \to \pm\infty$.

$$f(x) = \frac{20x - 3x^2}{2x^2 + 100} \to \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

Asymptote $y = -\frac{3}{2}$, eine Parallele zur x-Achse

$$f(x) = \frac{20x - 3}{2x^2 + 100} \to \frac{20x}{2x^2} = \frac{10}{x} \to 0$$

Asymptote $y = 0$, die x-Achse

$$f(x) = \frac{20x - 3x^4}{2x^2 + 100} \to \frac{-3x^4}{2x^2} = -\frac{3}{2}x^2 \to -\infty$$

keine gerade Asymptote

Warum darf man das? Je grösser die Zahl, die man für x einsetzt ist, desto kleiner wird der Einfluss der restlichen Glieder.

Ein Beispiel:

x	100	1000	1'000'000
$y = \frac{20x - 3}{2x^2 + 100}$	$\frac{2'000 - 3}{20'000 + 100} = 0.09935$	$\frac{20'000 - 3}{2'000'000 + 100} = 0.01$	$\frac{2'000'000 - 3}{2'000'000'000'000 + 100} = 0.000001$

a) $y \to \pm\infty$

Hier gilt im Prinzip das gleiche, wie für die entsprechenden ganzen rationalen Funktionen: $y = x^2$, $y = x^3$

b) $y \to 0$ oder $y \to a$

Bei $y \to 0$ nähert sich die Kurve der x-Achse,
bei $y \to a$ nähert sich die Kurve einer Parallelen zu x-Achse: $y = a$,
die wir zeichnen!
Diese Asymptoten sind Linien, denen sich die Kurve für $x \to \pm\infty$ immer mehr nähert.
Sie sind in den folgende Beispielen grün ausgezogen gezeichnet.

Ob sich die Kurve der Geraden von oben oder von unten nähert, klärt man am besten ab, indem man eine nicht zu kleine Zahl einsetzt, z. B. $x = \pm 10$.

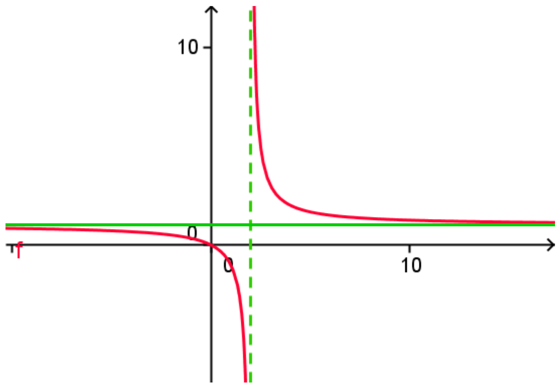
Übrigens: Pole sind spezielle Asymptoten.

$$y = \frac{x}{x-2} \to 1$$

Asymptote: $y = 1$

$x = 10 \qquad y = \frac{10}{12} = 0.83$

$x = -10 \qquad y = \frac{-10}{-8} = 1.25$

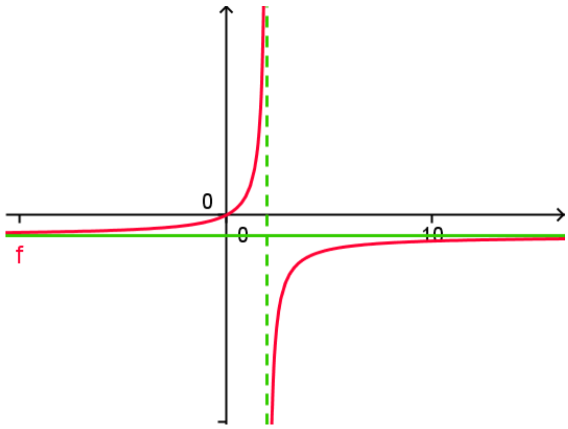


$$y = \frac{x}{2-x} \to -1$$

Asymptote: $y = -1$

$x = 10 \qquad y = \frac{10}{-8} = -1.25$

$x = -10 \qquad y = \frac{-10}{12} = -0.83$

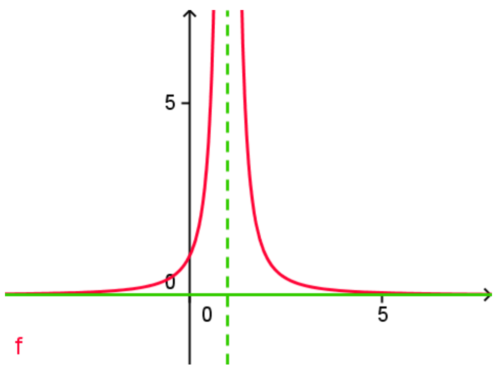


$$y = \frac{1}{(x-1)^2} \to 0$$

Asymptote: $y = 0$ (x-Achse)

$x = 10 \qquad y = \frac{1}{81} = 0.01$

$x = -10 \qquad y = \frac{1}{121} = 0.01$

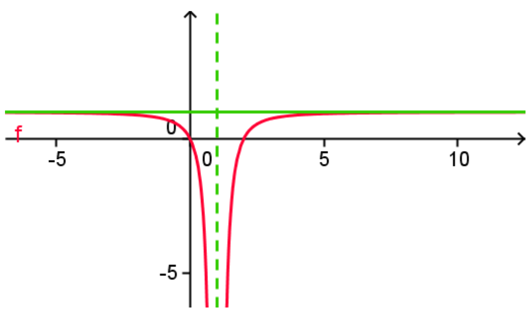


$$y = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \to 1$$

Asymptote: $y = 1$

$x = 10 \qquad y = \frac{80}{81} = 0.99$

$x = -10 \qquad y = \frac{120}{121} = 0.99$

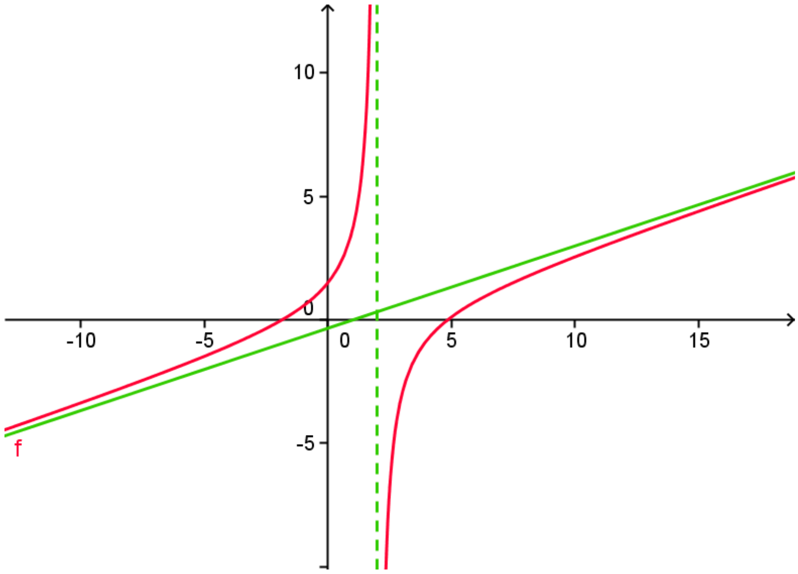


c) Spezialfall:
der Grad des Zählers ist gerade um 1 grösser, als der des Nenners.

Z. B. $y = \frac{x^2 - 3x - 9}{3x - 6} = (x^2 - 3x - 9) : (3x - 6) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - \frac{11}{3x - 6}$

für $x \to \pm\infty$ nähert sich der Graph der Funktion der Geraden $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

Diese Gerade heisst Asymptote und ist – genauso wie die waagrechten Asymptoten - zu zeichnen!



SYMMETRIE

Gebrochene Funktionen sind nur symmetrisch, wenn Zähler <u>und</u> Nenner symmetrisch sind:

$\frac{\text{gerade}}{\text{gerade}} = \frac{\text{ungerade}}{\text{ungerade}} = \text{gerade}$ also symmetrisch zur y-Achse

$\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}} = \frac{\text{ungerade}}{\text{gerade}} = \text{ungerade}$ also symmetrisch zum Nullpunkt

ACHSENSCHNITTPUNKTE

a) mit der y-Achse

Nicht immer sehr wichtig, aber einfach zu berechnen:

Wir setzen $x = 0$ ein.

b) mit der x-Achse (Nullstellen)

z. B. $$y = \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 4} = \frac{(x-5)(x+4)}{x^2 - 4}$$

$$y = 0 \Rightarrow (x-5)(x+4) = 0 \quad \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5 \\ x = -4 \end{array}$$

EXTREMA

Wir setzen $y' = 0$.

Merke! $\quad y' = \frac{a}{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

Es genügt, den Zähler der Ableitung $= 0$ zu setzen!

Zu jedem berechneten x-Wert gehört ein y-Wert, der aus $y = K$ auszurechnen ist!

WENDEPUNKTE

Wir setzen $y'' = 0$.