1. $3x^0y^2 + \sqrt[2p-2q]{(x^2 - 18xy^2 + 81y^4)^{p-q}}$

x^0 ist definitionsgemäss 1

die Wurzel schreiben wir als Exponent:

$$\sqrt[2p-2q]{(x^2 - 18xy^2 + 81y^4)^{p-q}} = \left(x^2 - 18xy^2 + 81y^4\right)^{\frac{p-q}{2p-2q}}$$

der Bruch im Exponent lässt sich kürzen $\frac{p-q}{2(p-q)} = \frac{1}{2}$

der Term in der Klammer ist eine binomische Formel:

$$\left(x^2 - 18xy^2 + 81y^4\right)^{\frac{1}{2}} = \left((x - 9y^2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (x - 9y^2)^{\frac{2}{2}} = x - 9y^2$$

oder:

$$\left(81y^4 - 18xy^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left((9y^2 - x)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (9y^2 - x)^{\frac{2}{2}} = 9y^2 - x$$

zusammengefasst schreibt sich das als: $|x - 9y^2|$, denn eine Wurzel hat immer ein positives Resultat

Die Aufgabe hat zwei Lösungen:

$$3x^0y^2 + \sqrt[2p-2q]{(x^2 - 18xy^2 + 81y^4)^{p-q}} = 3y^2 + x - 9y^2 = \mathbf{x - 6y^2} \quad \text{wenn } x \geq 0$$

$$3x^0y^2 + \sqrt[2p-2q]{(x^2 - 18xy^2 + 81y^4)^{p-q}} = 3y^2 + 9y^2 - x = \mathbf{12y^2 - x} \quad \text{wenn } x \leq 9y^2$$

---

2. $$\frac{16e^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[6]{e^5}\right)^{-1}}{\sqrt[4]{e^{-1}}}-\frac{9\,e^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[8]{e^2}}{\left(\sqrt[6]{e}\right)^{-1}\cdot\sqrt[6]{e}}$$

Ich berechne jeden Summanden einzeln und schreibe alle Wurzeln als Exponenten:

$$\frac{16e^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[6]{e^5}\right)^{-1}}{\sqrt[4]{e^{-1}}}=\frac{16e^{\frac{4}{3}}\cdot e^{-\frac{5}{6}}}{e^{-\frac{1}{4}}}=16e^{\frac{4}{3}}\cdot e^{-\frac{5}{6}}\cdot e^{\frac{1}{4}}=16e^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{9\,e^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[8]{e^2}}{\left(\sqrt[6]{e}\right)^{-1}\cdot\sqrt[6]{e}}=\frac{9\,e^{\frac{2}{3}}\cdot e^{\frac{2}{8}}}{e^{-\frac{1}{6}}\cdot e^{\frac{1}{6}}}=\frac{9e^{\frac{11}{12}}}{e^0}=9e^{\frac{11}{12}}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{16e^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[6]{e^5}\right)^{-1}}{\sqrt[4]{e^{-1}}}-\frac{9\,e^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[8]{e^2}}{\left(\sqrt[6]{e}\right)^{-1}\cdot\sqrt[6]{e}}=\mathbf{16e^{\frac{3}{4}}-9e^{\frac{11}{12}}}$$

3. $$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{x^{40}}}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^{52}}}}}$$

Der Zähler lässt sich leicht vereinfachen: $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{x^{40}}}} = \sqrt[2\cdot 4\cdot 2]{x^{40}} = \sqrt[16]{x^{40}} = x^{\frac{40}{16}} = x^{\frac{5}{2}}$

Denn Nenner berechne ich von innen nach aussen:

$$\sqrt[4]{x^{52}} = x^{13}$$

$$x^3 \cdot x^{13} = x^{16}$$

$$\sqrt{x^{16}} = x^8$$

$$x \cdot x^8 = x^9$$

$$\sqrt{x^9} = x^{\frac{9}{2}}$$

Damit ergibt sich für das Resultat:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{x^{40}}}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^{52}}}}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{9}{2}}} = x^{\frac{5}{2}-\frac{9}{2}} = x^{-2}$$

4. $\sqrt[8]{54^{-1}x^{-7}y^{5}} : \left(\frac{48x^{-7}}{y^{9}}\right)^{0.25} \cdot \left(\frac{486y}{x^{7}}\right)^{\frac{1}{8}}$

Wurzeln wegschaffen, Potenzen verrechnen, aus der Division mit Kehrwert eine Multiplikation machen:

$$\sqrt[8]{54^{-1}x^{-7}y^{5}} : \left(\frac{48x^{-7}}{y^{9}}\right)^{0.25} \cdot \left(\frac{486y}{x^{7}}\right)^{\frac{1}{8}} =$$

$$54^{-\frac{1}{8}}x^{-\frac{7}{8}}y^{\frac{5}{8}} \cdot \frac{y^{\frac{9}{4}}}{48^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{7}{4}}} \cdot \frac{486^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}}{x^{\frac{7}{8}}} =$$

$$54^{-\frac{1}{8}}x^{-\frac{7}{8}}y^{\frac{5}{8}} \cdot y^{\frac{9}{4}} \cdot 48^{-\frac{1}{4}}x^{\frac{7}{4}} \cdot 486^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{7}{8}} =$$

Zusammengehörendes sammeln und vereinfachen:

$$54^{-\frac{1}{8}} \cdot 48^{-\frac{1}{4}} \cdot 486^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{54}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot 486^{\frac{1}{8}} \cdot 48^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{486}{54}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot 48^{-\frac{1}{4}} = 9^{\frac{1}{8}} \cdot 48^{-\frac{1}{4}} =$$

$$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 48^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 48^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2^{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$x^{-\frac{7}{8}} \cdot x^{\frac{7}{4}} \cdot x^{-\frac{7}{8}} = x^{0} = 1$$

$$y^{\frac{5}{8}} \cdot y^{\frac{9}{4}} \cdot y^{\frac{1}{8}} = y^{3}$$

Das ergibt das Schlussresultat: $\sqrt[8]{54^{-1}x^{-7}y^{5}} : \left(\frac{48x^{-7}}{y^{9}}\right)^{0.25} \cdot \left(\frac{486y}{x^{7}}\right)^{\frac{1}{8}} = \mathbf{\frac{y^{3}}{2}}$

5. $\left(a\sqrt{b^5} - a\sqrt[4]{b^6}\right)^2$

Da ist zuerst einmal die binomische Formel anzuwenden:

$$\left(a\sqrt{b^5} - a\sqrt[4]{b^6}\right)^2 = a^2 \cdot b^5 - 2a^2\sqrt{b^5} \cdot \sqrt[4]{b^6} + a^2 \cdot \left(\sqrt[4]{b^6}\right)^2$$

Dabei ist: $\sqrt{b^5} \cdot \sqrt[4]{b^6} = b^{\frac{5}{2}} \cdot b^{\frac{6}{4}} = b^4$

$$\left(\sqrt[4]{b^6}\right)^2 = \left(b^{\frac{6}{4}}\right)^2 = b^3$$

Wir erhalten somit:

$$\left(a\sqrt{b^5} - a\sqrt[4]{b^6}\right)^2 = \mathbf{a^2b^5 - 2a^2b^4 + a^2b^3}$$

oder in faktorisierter Form: $\left(a\sqrt{b^5} - a\sqrt[4]{b^6}\right)^2 = a^2b^3\,(b-1)^2$

6. $$\frac{\sqrt[6]{a^{11}\cdot\sqrt{a}}\cdot\left(a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a^{6}}\cdot\sqrt{a}\right)^{0.5}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^{9}\cdot\sqrt[4]{a^{19}}}\cdot\sqrt{a^{-14}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{a}}^{-3}}}$$

Zuerst der Zähler:

$$\sqrt[6]{a^{11}\cdot\sqrt{a}}\cdot\left(a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a^{6}}\cdot\sqrt{a}\right)^{0.5}=\sqrt[6]{a^{11}\cdot a^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(a^{-1}\cdot a^{2}\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{0.5}=$$

$$\sqrt[6]{a^{\frac{23}{2}}}\cdot\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{0.5}=\left(a^{\frac{23}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{23}{12}}\cdot a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{32}{12}}=a^{\frac{8}{3}}$$

dann der Nenner:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^{9}\cdot\sqrt[4]{a^{19}}}\cdot\sqrt{a^{-14}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^{9}\cdot a^{\frac{19}{4}}}\cdot a^{-7}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{3}{4}}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^{\frac{55}{4}}}\cdot a^{-7}\cdot a^{\frac{3}{4}}}=$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^{\frac{55}{4}}}}=\sqrt{a^{\frac{55}{12}}\cdot a^{-7}\cdot a^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}}=a^{-\frac{5}{6}}$$

damit ergibt sich für das Resultat:

$$a^{\frac{8}{3}}:a^{-\frac{5}{6}}=a^{\frac{21}{6}}=\mathbf{a^{\frac{7}{2}}}$$