Sechs schwierigere Exponentialgleichungen, bei denen früher oder später Logarithmen eingesetzt werden müssen:

a) $2^{x-1} \cdot 5^{2x-1} = 3^{1-x}$

b) $5^x + 6^x = 6^{x+1}$

c) $2^{x+1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^x$

d) $4^{x-1} - 9^x = 3^{2x-1} - 2^{2x+1}$

e) $2^2 \cdot 5^x - 2^{2x} = 2^{2x+2}$

f) $2^{4x} + 2^{4x+5} = 99$

Bei den Aufgaben b) bis f) stehen überall eine oder zwei Summen. Diese Summen muss man vor dem Logarithmieren unbedingt wegbringen!
Tipp: faktorisieren!
Kontrollieren Sie die Lösungen durch Einsetzen (Taschenrechner!).

a) $2^{x-1} \cdot 5^{2x-1} = 3^{1-x}$

Hier hat es nur ein Produkt – wir können beide Seiten logarithmieren:

$$
\begin{aligned}
\log(2^{x-1} \cdot 5^{2x-1}) &= \log(3^{1-x}) \\
\log(2^{x-1}) + \log(5^{2x-1}) &= \log(3^{1-x}) \\
(x-1)\log 2 + (2x-1)\log 5 &= (1-x)\log 3 \\
x\log 2 - \log 2 + 2x\log 5 - \log 5 &= \log 3 - x\log 3 \\
x\log 2 + x\log(5^2) + x\log 3 &= \log 3 + \log 2 + \log 5 \\
x\left(\log 2 + \log(5^2) + \log 3\right) &= \log 30 \\
x\log 150 &= \log 30 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{\frac{\log 30}{\log 150} \approx 0.6788}
\end{aligned}
$$

b) $5^x + 6^x = 6^{x+1}$

Umordnen und 6^x ausklammern:

$$
\begin{aligned}
5^x &= 6^{x+1} - 6^x = 6^x(6-1) = 5 \cdot 6^x \qquad | :5 \\
5^{x-1} &= 6^x \\
\log(5^{x-1}) &= \log(6^x) \\
(x-1)\log 5 &= x\log 6 \\
x\log 5 - \log 5 &= x\log 6 \\
-\log 5 &= x\log 6 - x\log 5 = x(\log 6 - \log 5) = x\log 1.2 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{-\frac{\log 5}{\log 1.2} \approx -8.8275}
\end{aligned}
$$

c) $2^{x+1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^x$

Umordnen und Ausklammern!

$$\begin{aligned}
2^{x+1} + 2^x &= 3^{x-1} + 3^x \\
2^x(2+1) &= 3^{x-1}(1+3) \\
3 \cdot 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} \qquad \Big| \;:3, \quad :4 = 2^2 \\
2^{x-2} &= 3^{x-2} \\
\log(2^{x-2}) &= \log(3^{x-2}) \\
(x-2)\log 2 &= (x-2)\log 3 \\
x\log 2 - 2\log 2 &= x\log 3 - 2\log 3 \\
x\log 2 - 2\log 2 &= x\log 3 - 2\log 3 \\
2\log 3 - 2\log 2 &= x\log 3 - x\log 2 \\
2\log 1.5 &= x(\log 3 - \log 2) \\
\mathbf{x} &= \mathbf{\frac{2\log 1.5}{\log 1.5} = 2}
\end{aligned}$$

Diesen Schluss könnte man eigentlich schon aus der Gleichung $2^{x-2} = 3^{x-2}$ ziehen!

d) $4^{x-1} - 9^x = 3^{2x-1} - 2^{2x+1}$

Umordnen und Ausklammern!

Bedenken Sie, dass: $4 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 4^{x-1} = 2^{2(x-1)} = 2^{2x-2}$ und $9 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad 9^x = 3^{2x}$.

$$\begin{aligned}
2^{2x-2} + 2^{2x+1} &= 3^{2x-1} + 3^{2x} \\
2^{2x}(2^{-2} + 2) &= 3^{2x}(3^{-1} + 1) \\
\frac{9}{4} \cdot 2^{2x} &= \frac{4}{3} \cdot 3^{2x} \qquad \Big| \;\cdot 12 \\
27 \cdot 2^{2x} &= 16 \cdot 3^{2x} \\
\log(27 \cdot 2^{2x}) &= \log(16 \cdot 3^{2x}) \\
\log 27 + 2x\log 2 &= \log 16 + 2x\log 3 \\
\log 27 - \log 16 &= 2x\log 3 - 2x\log 2 \\
\log 27 - \log 16 &= 2x(\log 3 - \log 2) \\
\mathbf{x} &= \mathbf{\frac{\log 27 - \log 16}{2\log 1.5} \approx 0.645}
\end{aligned}$$

e) $2^2 \cdot 5^x - 2^{2x} = 2^{2x+2}$

Umordnen und faktorisieren:

$$
\begin{aligned}
2^2 \cdot 5^x &= 2^{2x+2} + 2^{2x} \\
2^2 \cdot 5^x &= 2^{2x}(2^2+1) = 5 \cdot 2^{2x} \qquad \Big| : 2^2 \\
5^x &= 5 \cdot 2^{2x-2} \\
\log(5^x) &= \log(5 \cdot 2^{2x-2}) \\
x \log 5 &= \log 5 + (2x-2)\log 2 \\
x \log 5 &= \log 5 + 2x\log 2 - 2\log 2 \\
x\log 5 - 2x\log 2 &= \log 5 - 2\log 2 \\
x(\log 5 - 2\log 2) &= \log 5 - \log 4 \\
x(\log 5 - \log 4) &= \log 5 - \log 4 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Kontrolle: $2^2 \cdot 5^1 - 2^2 = 20 - 4 = 16 = 2^4$

Diese einfache Lösung liesse sich auch ohne Logarithmen finden:

$$5^x = 5 \cdot 2^{2(x-1)} \quad \Rightarrow \quad 5^x : 5 = 5^{x-1} = 2^{2(x-1)} = 4^{x-1}$$

$5^{x-1} = 4^{x-1}$ kann nur stimmen, wenn die Exponenten Null sind.

f)

$$
\begin{aligned}
2^{4x} + 2^{4x+5} &= 99 \\
2^{4x}(1+2^5) &= 99 \\
33 \cdot 2^{4x} &= 99 \\
2^{4x} &= 3 \\
4x \log 2 &= \log 3 \\
x \log(2^4) &= \log 3 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{\frac{\log 3}{\log 16} \approx 0.396}
\end{aligned}
$$