g15_5

Die folgenden Aufgaben lassen sich lösen, wenn Sie beide Seiten logarithmieren:

a) $x^{1+\log x} = 10^2$ b) $x^3 = 10\,x^{1+\log x}$

---

a)

$$\begin{aligned} x^{1+\log x} &= 10^2 \\ \log(x^{1+\log x}) &= \log(10^2) \\ (1+\log x)\cdot\log x &= 2 \\ \log x + (\log x)^2 &= 2 \\ (\log x)^2 + \log x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung für $\log x$; sie lässt sich lösen, indem man $\log x$ durch u ersetzt:

$$\begin{aligned} u^2 + u - 2 &= 0 \\ (u+2)(u-1) &= 0 \end{aligned}$$ (auch mit TR lösbar)

Wir gewinnen zwei brauchbare Lösungen für u:

$u_1 = 2 \quad\Rightarrow\quad \log x = -2$, $\mathbf{x = 10^{-2} = 0.01}$ und $u_2 = 1 \quad\Rightarrow\quad \log x = 1$, $\mathbf{x = 10^{1} = 10}$

Kontrolle durch Einsetzen: $10^{1+\log 10} = 10^{1+1} = 10^2$

$$0.01^{1+\log 0.01} = 0.01^{1+(-2)} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-1} = 100 = 10^2$$

b)

$$\begin{aligned} x^3 &= 10\,x^{1+\log x} \\ \log(x^3) &= \log(10\,x^{1+\log x}) \\ 3\log x &= \log 10 + \log(x^{1+\log x}) \\ 3\log x &= 1 + (1+\log x)\log x \\ 3\log x &= 1 + \log x + (\log x)^2 \\ 0 &= (\log x)^2 - 2\log x + 1 \end{aligned}$$

$x^3 = 10\,x^{1+\log x}$

Es geht auch ohne den Umweg über u:

$$(\log x)^2 - 2\log x + 1 = (\log x - 1)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \log x = 1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x = 10}$$

Kontrolle durch Einsetzen: $10^3 = 10\cdot 10^{1+\log 10} = 10\cdot 10^{1+1} = 10^3$