Vier schwierigere Exponentialgleichungen, die ohne Logarithmen gelöst werden können:

a) $2^{3x-4} \cdot 4^{2x-3} = 8^{x+2}$

b) $3^{4x-1} \cdot 9^{2x+1} = 27^{x} \cdot 3^{5x+1}$

c) $7^{x} + 8 \cdot 7^{x-1} = 735$

d) $8^{2x-1} - 4^{3x-1} + 2^{6x-1} = 96$

Versuchen Sie bei diesen Aufgaben beide Seiten auf eine Gleichung der Form $a^b = a^c$ zu bringen, bei den Aufgaben c und d müssen Sie ausserdem faktorisieren.

a)
$$\begin{aligned}
2^{3x-4} \cdot 4^{2x-3} &= 8^{x+2} \\
2^{3x-4} \cdot (2^2)^{2x-3} &= (2^3)^{x+2} \\
2^{3x-4} \cdot 2^{2(2x-3)} &= 2^{3(x+2)} \\
2^{3x-4} \cdot 2^{4x-6} &= 2^{3x+6} \\
2^{7x-10} &= 2^{3x+6} \\
7x - 10 &= 3x + 6 \\
4x &= 16 \\
\mathbf{x} &\mathbf{= 4}
\end{aligned}$$

Kontrolle: $2^8 \cdot 4^5 = 8^6$

b)
$$\begin{aligned}
3^{4x-1} \cdot 9^{2x+1} &= 27^{x} \cdot 3^{5x+1} \\
3^{4x-1} \cdot (3^2)^{2x+1} &= (3^3)^{x} \cdot 3^{5x+1} \\
3^{4x-1} \cdot 3^{2(2x+1)} &= 3^{3x} \cdot 3^{5x+1} \\
3^{4x-1} \cdot 3^{4x+2} &= 3^{3x} \cdot 3^{5x+1} \\
3^{8x+1} &= 3^{8x+1}
\end{aligned}$$

Die Gleichung ist für jede Einsetzung richtig: $L = \mathbb{R}$

c)
$$\begin{aligned}
7^{x} + 8 \cdot 7^{x-1} &= 735 \\
7^{x-1} \cdot (7 + 8) &= 735 \\
7^{x-1} \cdot 15 &= 735 \qquad \big| \; :15 \\
7^{x-1} &= 49 \\
7^{x-1} &= 7^2 \\
x - 1 &= 2 \\
\mathbf{x} &\mathbf{= 3}
\end{aligned}$$

Kontrolle: $7^3 + 8 \cdot 7^2 = 735$

d)
$$8^{2x-1} - 4^{3x-1} + 2^{6x-1} = 96$$
$$(2^3)^{2x-1} - (2^2)^{3x-1} + 2^{6x-1} = 96$$
$$2^{3(2x-1)} - 2^{2(3x-1)} + 2^{6x-1} = 96$$
$$2^{6x-3} - 2^{6x-2} + 2^{6x-1} = 96$$
$$2^{6x-3} - 2^{6x-3+1} + 2^{6x-3+2} = 96$$
$$2^{6x-3} \cdot (1 - 2^1 + 2^2) = 96$$
$$2^{6x-3} \cdot 3 = 96$$
$$2^{6x-3} = 32$$
$$2^{6x-3} = 2^5$$
$$6x - 3 = 5$$
$$\mathbf{x = \frac{4}{3}}$$

Probe: $8^{\frac{5}{3}} - 4^3 + 2^7 = 32 - 64 + 128 = 96$