Sechs Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen:

a) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ b) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

c) $2^{2x-1} - 3 \cdot 2^x + 4 = 0$ d) $4^{x+1} - 2^{x+4} = 128$

e) $25^{x+1} + 3 \cdot 5^{x+2} - 16 = 0$ f) $4^{x+1} + 16^{x-1} = 1536$

Bei diesen Aufgaben ist Folgendes zu überlegen:

36^x ist das Quadrat von 6^x, denn $(36)^x = (6^2)^x = 6^{2x} = (6^x)^2$

3^{2x} ist das Quadrat von 3^x, denn $3^{2x} = (3^x)^2$

a) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

Wir setzen: $u = 3^x \quad \Rightarrow \quad u^2 - 12u + 27 = (u-9)(u-3) = 0$

Beide Lösungen sind möglich:

$3^x = 9 = 3^2$ $3^x = 3 = 3^1$

$x = 2$ **$x = 1$**

Kontrolle: $3^4 - 12 \cdot 3^2 + 27 = 0$ und $3^2 - 12 \cdot 3^1 + 27 = 0$

b) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

Wir setzen: $u = 2^x$ und $u^2 = 4^x \quad \Rightarrow \quad u^2 - 12u + 32 = (u-4)(u-8) = 0$

Beide Lösungen sind möglich:

$2^x = 4 = 2^2$ $2^x = 8 = 2^3$

$x = 2$ **$x = 3$**

Kontrolle: $4^2 - 12 \cdot 2^2 + 32 = 0$ und $4^3 - 12 \cdot 2^3 + 32 = 0$

c) $2^{2x-1} - 3 \cdot 2^x + 4 = 0$

Es gilt: $2^{2x-1} = 2^{2x} \cdot 2^{-1} = \dfrac{2^{2x}}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2^{2x}}{2} - 3 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad \Big| \cdot 2$

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Wir setzen: $u = 2^x \quad \Rightarrow \quad u^2 - 6u + 8 = (u-4)(u-2) = 0$

$2^x = 4 = 2^2$ $\qquad$ $2^x = 2 = 2^1$

x = 2 $\qquad$ **x = 1**

Kontrolle: $2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$ und $2^1 - 3 \cdot 2^1 + 4 = 0$

d) $4^{x+1} - 2^{x+4} = 128$

Es gilt: $4^{x+1} = 2^{2(x+1)}$ und $2^{x+4} = 2^{x+1+3} = 2^{x+1} \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^{x+1}$

Wir setzen: $u = 2^{x+1} \quad \Rightarrow \quad u^2 - 8u - 128 = (u-16)(u+8) = 0$

Die positive Lösung $u = 16 = 2^4$ ist brauchbar:

$2^{x+1} = 2^4$

$x + 1 = 4$

x = 3

Kontrolle: $4^4 - 2^7 = 128$

e) $25^{x+1} + 3 \cdot 5^{x+2} - 16 = 0$

$5^{2(x+1)} + 3 \cdot 5^{x+1} \cdot 5 - 16 = 0$

Wir setzen: $u = 5^{x+1} \quad \Rightarrow \quad u^2 + 15u - 16 = (u+16)(u-1) = 0$

Wir können nur die Lösung $u = 1$ brauchen.

$$5^{x+1} = 1 = 5^0$$
$$x + 1 = 0$$
$$\mathbf{x = -1}$$

Kontrolle: $25^0 + 3 \cdot 5^1 - 16 = 1 + 15 - 16 = 0$

f) $4^{x+1} + 16^{x-1} = 1536$

Es gilt: $16^{x-1} = 4^{2(x-1)}$ und $4^{x+1} = 4^{x-1+2} = 4^{x-1} \cdot 4^2 = 16 \cdot 4^{x-1}$

Wir setzen: $u = 4^{x-1} \quad \Rightarrow \quad 16u + u^2 - 1536 = 0$

Mit dem Taschenrechner erhalten wir die Lösungen $u_1 = 32 = 2^5$ und $u_2 = -48$, von denen sich nur die positive verwenden lässt:

$$4^{x-1} = 2^5$$
$$2^{2(x-1)} = 2^5$$
$$2(x-1) = 5$$
$$\mathbf{x = 3.5}$$

Kontrolle: $4^{4.5} + 16^{2.5} = 4^{\frac{9}{2}} + 16^{\frac{5}{2}} = 2^9 + 4^5 = 1536$