Wie in der Aufgabe angegeben, können diese Gleichungen sehr bequem mit Hilfe des binomischen Satzes gelöst werden. Das heisst nicht, dass nicht auch die Divisionsmethode möglich wäre.

---

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 64$

Hier erkennt man wahrscheinlich sofort die 3. Potenz von $(x+1)$. Wenn man nicht sicher ist, muss es, wie bei den folgenden Beispielen nachgeprüft werden.

$$(x+1)^3 = 64$$
$$x+1 = 4$$
$$\mathbf{x = 3}$$

b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 125$

Aus dem ersten und letzen Glied auf der linken Seite schliesst man auf: $(x+2)^3$.
Diesen Term berechnen wir nun mit Hilfe des binomischen Satzes:

$$(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \ \text{; es ist richtig.}$$

$$(x+2)^3 = 125$$
$$x+2 = 5$$
$$\mathbf{x = 3}$$

c) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 625$

Wir prüfen die Vermutung $(x-2)^4$:

$$(x-2)^4 = x^4 - 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 2^2 - 4 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

$$(x-2)^4 = 625$$
$$x-2 = \pm 5$$
$$\mathbf{x_1 = 7}$$
$$\mathbf{x_2 = -3}$$

d) $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 = 81$

Wir prüfen die Vermutung $(x+2)^4$:

$$(2x+1)^4 = (2x)^4 + 4\cdot(2x)^3\cdot 1 + 6\cdot(2x)^2\cdot 1^2 + 4\cdot 2x\cdot 1^3 + 1^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$$

$$(2x+1)^4 = 81$$
$$2x+1 = \pm 3$$
$$\mathbf{x_1 = 1}$$
$$\mathbf{x_2 = -2}$$