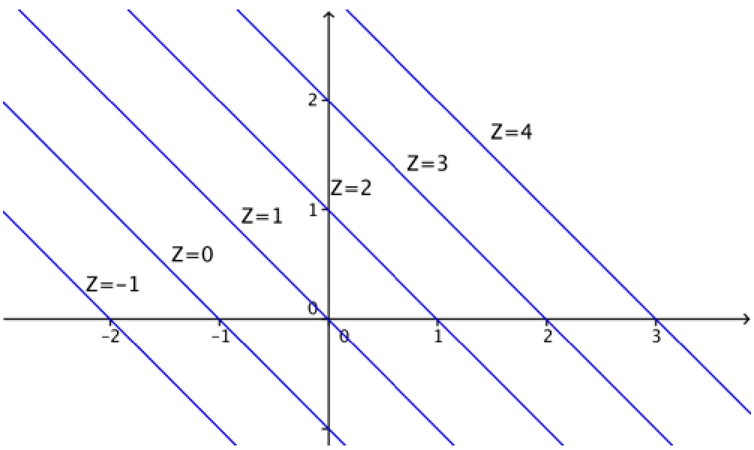
LINEARE OPTIMIERUNG: EINFÜHRUNG

a) Ein Element sind die Systeme linearer Ungleichungen, die bei den vorhergehenden Aufgaben vorgestellt wurden.
Der zu diesem Ungleichungssystem gehörende Graph wird im folgenden **Planungspolygon** genannt.

b) Ein zweites Element sind die sogenannten **Zielfunktionen** Z.

Sei z. B. $Z = x + y + 1$

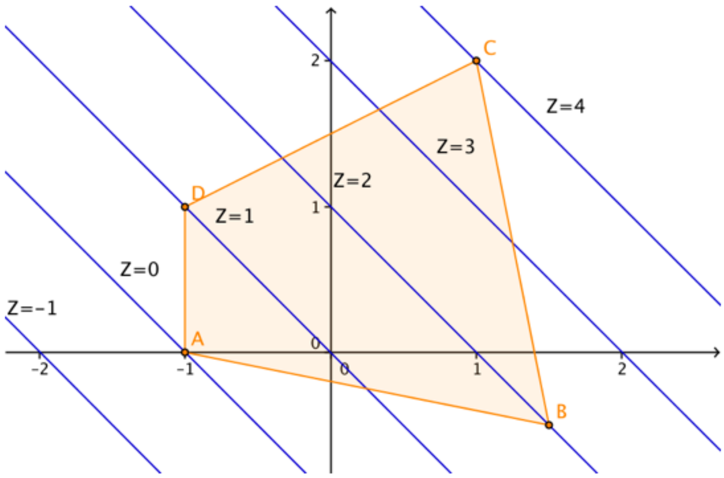
Bei konstantem Z ist der Graph dieser Funktion eine Gerade: $y = -x + (Z - 1)$
mit der Steigung -1 und dem y-Achsenabschnitt $(Z - 1)$, der von Z abhängig ist.



Mit zunehmendem Z verschiebt sich die Gerade nach oben.

Alle Punktepaare, die auf einer Geraden liegen, haben dasselbe Z

Legen wir nun diese Parallelenschar über ein Planungspolygon:



Wir sehen: hier gibt es genau einen Punkt C, für den Z ein Maximum ist:

$C(1|2) \quad \Rightarrow \quad Z = x + y + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

und es gibt bei diesem Beispiel genau einen Punkt A, für den Z minimal ist:

$A(-1|0) \quad \Rightarrow \quad Z = x + y + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$

Es genügt übrigens eine dieser Geraden zu zeichnen, um zu sehen, ob es einen Maximal- oder Minimalpunkt hat, und wo er liegt

Ein Beispiel mit einer angewandten Aufgabe:

Drei Spezialisten A, B, C montieren zwei verschiedene Typen T_1 und T_2 einer Maschine. Die Tabelle gibt die Arbeitszeit in Stunden für die einzelnen Typen an.
A steht für höchstens 300 Stunden, B höchstens 230 Stunden und C höchstens 45 Stunden zur Verfügung.

Der Gewinn beträgt bei Typ T_1 100 Franken und bei T_2 150 Franken pro Stück.
Wie viele Maschinen jeden Typs bringen den grössten Gewinn?

	A	B	C
T_1	$2/5$	1	$1/4$
T_2	1	$1/2$	$1/16$

Hier werden die gleichen Techniken angewandt, wie sie in
http://www.sos-mathe.ch/g/g0/g05/aufg_g05.html geübt werden.

Anzahl der Maschinen vom Typ T_1: x
Anzahl der Maschinen vom Typ T_2: y

Gefragt wird nach dem grössten Gewinn: $Z = 100x + 150y$

A steht höchstens 300h zur Verfügung: $\frac{2}{5}x + y \le 300$

B steht höchstens 230h zur Verfügung: $x + \frac{1}{2}y \le 230$

A steht höchstens 45h zur Verfügung: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}y \le 45$

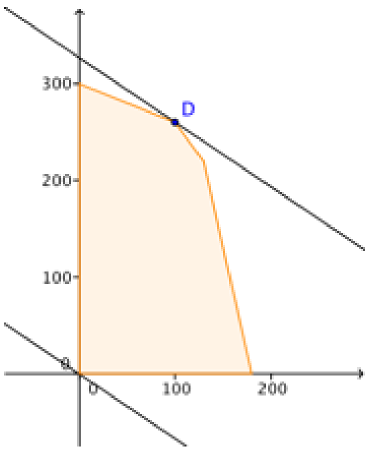
Sicher ist: $x \ge 0$

und $y \ge 0$

Berechnung der Steigung der Zielfunktion: $Z = 100x + 150y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{150}Z$

Die Ungleichungen liefern vereinfacht das System:

$$\left| \begin{array}{r} 2x + 5y \le 1500 \\ 2x + y \le 460 \\ 4x + y \le 720 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{array} \right|$$



Das Maximum wird im Punkt D erreicht:

$$\left| \begin{array}{r} 2x + 5y = 1500 \\ 2x + y = 460 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad D(100 \mid 260)$$

und es ist $\mathbf{Z_{Max}(100 \mid 260) = 49'000}$ **Fr.**