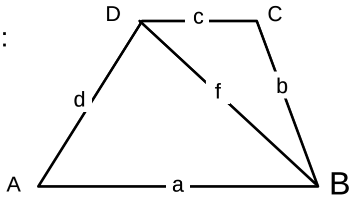
Bestimmen Sie im gegebenen Trapez die fehlenden Grössen:

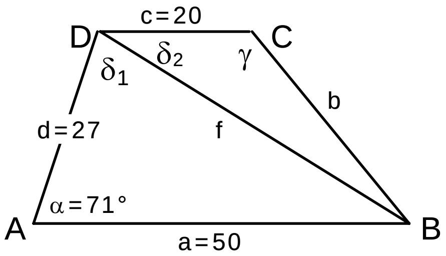
a) $a = 50$, $c = 20$, $d = 27$, $\alpha = 71°$
b) $b = 19$, $c = 33$, $\alpha = 47°$, $\beta = 59°$
c) $b = c = d = 7.8$, $\beta = 37°$
d) $b = d = 12$, $f = 27$, $\alpha = 70°$



Vorbemerkung:
Ich speichere alle gefundenen Werte auf dem Taschenrechner und rechne grundsätzlich mit den gespeicherten Werten weiter; das verhütet Rundungsfehler und Tippfehler und ist erst noch schneller.

Es lohnt sich oft, die Figuren in einem geeigneten Massstab zu konstruieren. So kann man sich durch Nachmessen davon überzeugen, dass einigermassen richtig gerechnet wurde.

a)



$a = 50$, $c = 20$, $d = 27$, $\alpha = 71°$

Konstruktionsfolge:
a
α
d
c // a

Wir beginnen mit dem Dreieck ABD und berechnen f:

$$f^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad f = 48.5$$

Ins andere Dreieck gelangen wir mit δ und seinen Teilwinkeln:

$$\frac{\sin\delta_1}{a} = \frac{\sin\alpha}{f} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 77.2°$$

$$\delta = 180° - \alpha = 109° \qquad \text{(Trapez!)}$$

$$\delta_2 = 31.8°$$

Nun können wir im Dreieck DBC weiterrechnen:

$$b^2 = c^2 + f^2 - 2cf \cdot \cos\delta_2 \quad \Rightarrow \quad b = 33.2$$

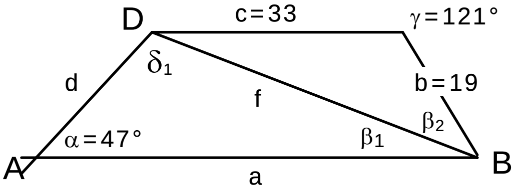
Es fehlen noch Winkel:

$$\frac{\sin\gamma}{f} = \frac{\sin\delta_2}{b} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 50.3°$$

Das kann nicht stimmen, f ist die grösste Seite! Siehe auch Figur!

$$\gamma = 180° - 50.3° = 129.7 \;\text{ und }\; \beta = 50.3°$$

b)



$b = 19$, $c = 33$, $\alpha = 47°$, $\beta = 59°$

Konstruktionsfolge:
b
$\gamma = 180° - \beta$
c
a // c
$\delta = 180° - \alpha$
d

Wir beginnen mit dem Dreieck BCD und benützen den Kosinussatz:

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad f = 45.8$$

Um ins andere Dreieck zu kommen, benötigen wir den Winkel β_2.

$$\frac{\sin\beta_2}{c} = \frac{\sin\gamma}{f} \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = 38.2°$$

Mit einfachen Winkelrechnungen erhalten wir im Dreieck ABD:

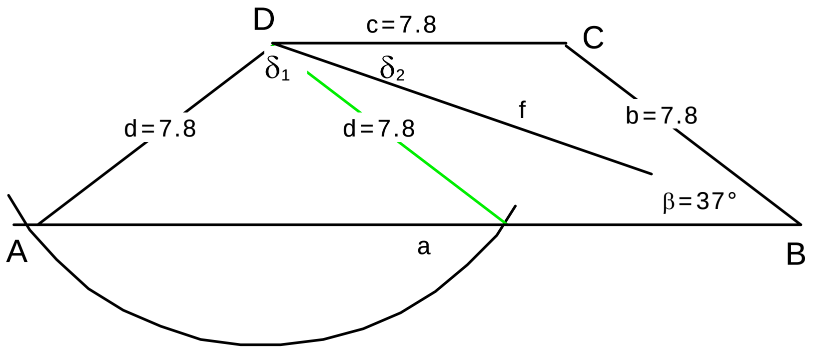
$$\beta_1 = 20.8°$$
$$\delta_1 = 112.2°$$

Nun können wir mit dem Sinussatz weiterrechnen:

$$\frac{d}{\sin\beta_1} = \frac{f}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad d = 22.3$$

$$\frac{a}{\sin\delta_1} = \frac{f}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad a = 58.0$$

c)



$b = c = d = 7.8$, $\beta = 37°$

Konstruktionsfolge:
(halbe Grösse)
b
$\gamma = 180° - \beta$ und β
b
c
a // c
d

Es gibt zwei Lösungen. eine ist ein Parallelogramm

Das Dreieck BCD ist gleichschenklig; das ergibt für den Basiswinkel δ_2:

$$\delta_2 = \frac{180° - \gamma}{2} = 18.5°$$

Ausserdem ist:

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad f = 14.8$$

Da im gleichschenkligen Trapez $\delta = \gamma \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \delta - \delta_2 = 124.5°$

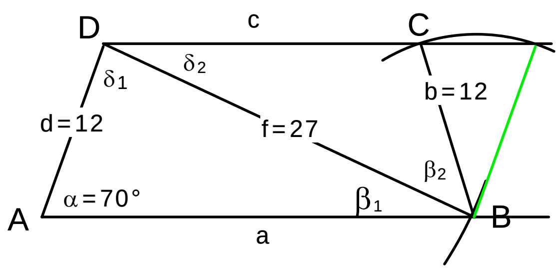
Ausserdem ist $\alpha = \beta = 37°$

Nun kann der Sinussatz benützt werden:

$$\frac{a}{\sin\delta_1} = \frac{f}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad a = 20.26$$

Im Fall des Parallelogramms, das auch zu den Trapezen gehört, ergeben sich die Masse ohne Rechnung.

d)



$b = d = 12, \; f = 27, \; \alpha = 70°$

Konstruktionsfolge:
d
α
f von D aus abtragen
c // a
b von B aus abtragen – 2 Lösungen

Das Dreieck ABD ist eindeutig bestimmt, der Winkel liegt der grösseren Seit f gegenüber:

$$\frac{\sin\beta_1}{d} = \frac{\sin\alpha}{27} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 24.7°$$

Nun berechnen wir einige einfache Winkel (das Trapez ist gleichschenklig):

$$\alpha = \beta = 70°$$
$$\gamma = \delta = 180° - 70° = 110°$$

$$\delta_1 = 180° - \alpha - \beta_1 = 85.3°$$
$$\delta_2 = \delta - \delta_1 = 24.7°$$

$$\beta_2 = \beta - \beta_1 = 85.3°$$

a erhalten wir im Dreieck ABD:

$$\frac{a}{\sin\delta_2} = \frac{f}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad a = 28.64$$

c erhalten wir im Dreieck BCD:

$$\frac{c}{\sin\beta_2} = \frac{f}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad c = 20.43$$

Wenn wir auf die Idee kämen, g aus b, f und δ_2 (Weil wir nicht merken, dass das Trapez gleichschenklig ist), dann wäre das Dreieck ABD nicht eindeutig bestimmt, denn der Winkel liegt der kleineren Seite gegenüber:

$$\frac{\sin\gamma}{f} = \frac{\sin\delta_2}{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= 70° \\ \gamma_2 &= 110° \end{aligned}$$