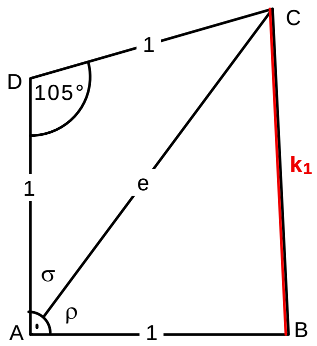
Die Kantenlänge eines Würfels mit $V = 2$ ist $k = \sqrt[3]{2} \approx 1.2600$ und lässt sich nicht exakt konstruieren. Prüfen Sie die beiden folgenden Näherungskonstruktionen auf ihre Genauigkeit:

Vorbemerkung:
Ich speichere alle gefundenen Werte auf dem Taschenrechner und rechne grundsätzlich mit den gespeicherten Werten weiter; das verhütet Rundungsfehler und Tippfehler und ist erst noch schneller.

Bei dieser Aufgabe ist es wichtig, dass mit möglichst vielen Stellen gerechnet wird.



Im Dreieck ACD:

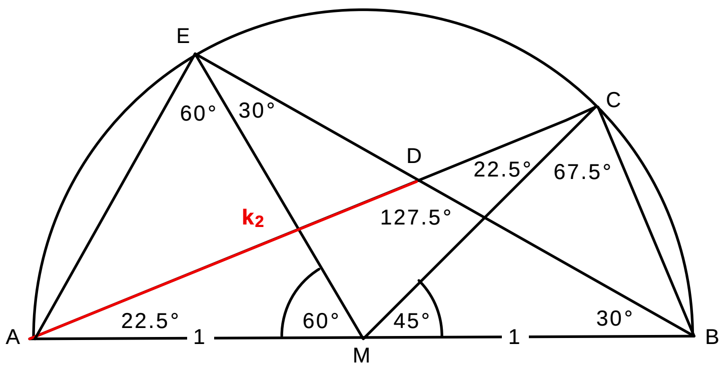
$e^2 = 1 + 1 - 2\cos 105° \quad \Rightarrow \quad e \approx 1.58$ exakter Wert im TR

$$\frac{\sin\sigma}{1} = \frac{\sin 105°}{e} \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 37.5°$$

$\rho \approx 52.5°$

mit r können wir im Dreieck ABC weiterrechnen, immer mit den gespeicherten möglichst genauen Werten!

$k_1{}^2 = 1 + e^2 - 2\,e\cos\rho \quad \Rightarrow \quad k_1 \approx 1.2593$



k_2 ist eine Seite des Dreiecks ADB

$$\frac{k_2}{\sin 30°} = \frac{2}{\sin 127.5°} \quad \Rightarrow \quad k_2 \approx 1.2605$$

Erläuterungen zur Winkelberechnung:

Winkel AEB = 90° und Winkel ACB = 90° Thaleskreis
Das Dreieck AMC ist gleichseitig, alle Winkel sind 60°
Die Dreiecke AMC und MBC sind gleichschenklig, daraus berechnen sich die Basiswinkel.

Beide Figuren sind exakt mit Zirkel und Lineal konstruierbar ($105° = 60° + 45°$). Sie wären auch exakt berechenbar (mit Halbwinkelformeln, Additionstheorem).

Dahinter steckt eines der grossen Probleme, mit denen sich die Mathematiker seit den alten Griechen beschäftigt haben:

Bei Eutokios von Askalon, einem späten Kommentator von Archimedes, findet man die Wiedergabe eines Briefes, den angeblich Eratosthenes an König Ptolemaios schrieb (mit grosser Wahrscheinlichkeit ist dieser Brief eine Fälschung). Der Brief beginnt so:

"Dem König Ptolemaios wünscht Eratosthenes Glück und Wohlsein. Von den alten Tragödiendichtern, sagt man, habe einer den Minos, wie er dem Glaukos ein Grabmal errichten liess, und hörte, dass es auf allen Seiten 100 Fuss haben werde sagen lassen:

'Zu klein entwarfst du mir die königliche Gruft. Verdopple sie; des Würfels (Gestalt) jedoch verfehle nicht!'

Man untersuchte aber auch von Seiten der Geometer, auf welche Weise man einen gegebenen Körper, ohne dass er seine Gestalt veränderte, verdoppeln könnte, und nannte die Aufgaben dieser Art: des Würfels Verdoppelung; denn einen Würfel zugrunde legend, suchte man diesen zu verdoppeln. Während nun lange Zeit hindurch alle ratlos waren, entdeckte zuerst Hippokrates von Chios, dass, wenn zwischen zwei Strecken, von denen die grösste doppelt so lang ist wie die kleinste, zwei mittlere Proportionale gefunden werden können, dass dann der Würfel verdoppelt werden könnte. Wonach er seine Ratlosigkeit in eine andere nicht geringere Ratlosigkeit verwandelte. Nach der Zeit, erzählt man, wären die Delier, weil sie von einer Krankheit befallen waren, einem Orakel zufolge geheissen worden, einen ihrer Altäre zu verdoppeln, und in dieselbe Verlegenheit geraten. Sie hätten aber die bei Platon in der Akademie gebildeten Geometer beschickt und gewünscht, sie möchten ihnen das Verlangte auffinden. Da sich diese nun mit Eifer der Sache unterzogen und zu zwei gegebenen (Strecken) zwei mittlere (Proportionale) suchten, soll sie der Tarentiner Archytas mittels Halbzylinder aufgefunden haben, Eudoxos aber mittels der sogenannten Bogenlinien. Es widerfuhr ihnen aber insgesamt, dass sie zwar ihre Zeichnungen mit geometrischer Evidenz nachgewiesen hatten, sie aber nicht leicht mit der Hand ausführen und zur Anwendung bringen konnten."
http://members.tripod.com/sfabel/mathematik/probleme_wuerfel_verd.html

$\sqrt[3]{2}$ lässt sich nicht exakt konstruieren; das wurde erst 1837 von Pierre Laurent Wantzel bewiesen. Derselbe bewies auch die Unlösbarkeit der Winkeldrittelung, des zweiten der drei klassischen Probleme.

Die Näherungskonstruktionen sind recht genau: $\frac{k_1}{\sqrt[3]{2}} = 0.9995$ 0.05 % zu klein

$\frac{k_2}{\sqrt[3]{2}} = 1.0005$ 0.05 % zu gross