Berechnen Sie die folgenden Potenzen ohne Taschenrechner auf 3 Stellen nach dem Dezimalpunkt genau:

$1.001^7 =$

Wir zerlegen die Basis 1.001 in ein Binom wobei es für das Potenzieren einfacher ist, wenn der zweite Summand als Zehnerpotenz geschrieben wird:

$$1.001 = 1 + 0.001 = 1 + 10^{-3}$$

und wenden den binomischen Satz an – soweit nötig:

$$\begin{aligned}(1+10^{-3})^7 &= 1^7 + 7\cdot 1^6\cdot(10^{-3}) + 21\cdot 1^5\cdot(10^{-3})^2 + \ldots\\ &= 1 + 7\cdot 10^{-3} + 21\cdot 10^{-6} + \ldots\\ &= 1 + 0.007 + 0.000'021 + \ldots\\ &= \mathbf{1.007}\end{aligned}$$

Das dritte Glied der Summe ist für die geforderte Genauigkeit nicht mehr nötig, und alle folgenden noch viel weniger.

Die folgenden Aufgaben funktionieren genau gleich. Ich werde sie deshalb in etwas weniger Einzelschritte zerlegen.

$$\begin{aligned}0.999^{10} &= (1-0.001)^{10} = (1-10^{-3})^{10}\\ &= 1 - 10\cdot 10^{-3} + 45\cdot(10^{-3})^2 - \ldots = 1 - 0.010 + 0.000'045 - \ldots = \mathbf{0.990}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.003^5 &= (1+3\cdot 10^{-3})^5\\ &= 1 + 5\cdot 3\cdot 10^{-3} + 10\cdot(3\cdot 10^{-3})^2 + \ldots = 1 + 15\cdot 10^{-3} + 10\cdot 9\cdot 10^{-6} + \ldots = \mathbf{1.015}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.0001^{20} &= (1+10^{-4})^{20}\\ &= 1 + 20\cdot 10^{-4} + 190\cdot(10^{-4})^2 + \ldots = 1 + 0.0020 + 0.000'001'90 + \ldots = \mathbf{1.002}\end{aligned}$$