Setzen Sie in der Formel $(a+b)^n$ für a und b geeignete Zahlen ein und berechnen Sie die folgenden Terme:

a) $\sum_{k=0}^{33} \binom{33}{k}$

Die gegebene Summe lässt sich ohne dass sie sich ändert ergänzen:

$$\sum_{k=0}^{33} \binom{33}{k} = \sum_{k=0}^{33} \binom{33}{k} \cdot 1^n \cdot 1^{33-n} = (1+1)^{33} = 2^{33}$$

$$\sum_{k=0}^{33} \binom{33}{k} = \mathbf{2^{33}}$$

b) $\sum_{k=0}^{34} (-1)^k \binom{34}{k}$

Diese Aufgabe ist der ersten sehr ähnlich:

$$\sum_{k=0}^{34} (-1)^k \binom{34}{k} = \sum_{k=0}^{34} \binom{34}{k} \cdot (-1)^k \cdot 1^{34-k} = \sum_{k=0}^{34} \binom{34}{k} \cdot 1^k \cdot (-1)^{34-k}$$

Das wäre: $(-1+1)^{34} = 0$ oder $(1+(-1))^{34} = 0$

$$\sum_{k=0}^{34} (-1)^k \binom{34}{k} = \mathbf{0}$$

c) $\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}$ Diese Aufgabe ist schwieriger!

Wir rechnen:

$$2\cdot\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}=\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}+\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}$$

Nun sind die Binomialkoeffizienten bekanntlich symmetrisch: $\binom{33}{2k}=\binom{33}{33-2k}$

$$2\cdot\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}=\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}+\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{33-2k}$$

$2k$ durchläuft der Reihe nach die Zahlen: 0, 2, 4, 6, . . . , 30, 32
$33-2k$ durchläuft der Reihe nach die Zahlen: 33, 31, 29, . . . , 3, 1

deshalb gilt:

$$2\cdot\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}=\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}+\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{33-2k}=\sum_{k=0}^{33}\binom{33}{k}=2^{33}$$ siehe Aufgabe a)

$$2\cdot\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}=2^{33}\qquad\Big|:2$$

$$\sum_{k=0}^{16}\binom{33}{2k}=\mathbf{2^{32}}$$

Das funktioniert für ungerade Exponenten wie 33. Bei geraden Exponenten ist die Rechnung weit komplizierter.