Aufgabe 16

Kollinear heisst parallel, der eine Vektor ist ein Vielfaches des andern.

C liegt in der xy-Ebene: $C(x|y|0)$

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(7|5|0)$$

Aufgabe 17

Seitenvektoren berechnen: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Daraus ergeben sich die Seitenlängen:

$$c = \sqrt{64+1+16} = 9, \quad b = \sqrt{16+9+0} = 5, \quad a = \sqrt{16+4+16} = 6 \quad \Rightarrow \quad u = 20$$

Aufgabe 18

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -19 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{450} \quad AC = \sqrt{450} \quad AD = \sqrt{450} \quad BC = \sqrt{450} \quad CD = \sqrt{450} \quad BD = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$$

Aufgabe 19

Der Vektor $\vec{a}$ hat die Länge $17.5 = \frac{35}{2}$

Wird er mit $\pm\frac{2}{5} = \pm 0.4$ erhält er die Länge 7. Die gesuchten Vektoren: $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 20

Punkt auf der x-Achse: $P(x|0|0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x+3 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = 4 \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|^2$$

$$(x+3)^2 + 144 + 36 = 4 \cdot (x^2 + 36 + 9)$$

$$0 = 3x^2 - 6x - 9$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -1$$

$$P_1(3|0|0), \quad P_2(-1|0|0)$$

Aufgabe 21

Sei $M(u|v|w)$; dann gilt: $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} u-1 \\ v \\ w+1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} u \\ v+2 \\ w-4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} u-3 \\ v-2 \\ w-3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} u-3 \\ v-1 \\ w-4 \end{pmatrix}$

M hat von allen vier Punkten denselben Abstand: $\overline{AM} = \overline{BM}, \quad \overline{BM} = \overline{CM}, \quad \overline{CM} = \overline{DM}$

Nach Quadrieren ergibt sich das Gleichungssystem.

$$\left| \begin{array}{rcl} (u-1)^2 + v^2 + (w+1)^2 & = & u^2 + (v+2)^2 + (w-4)^2 \\ u^2 + (v+2)^2 + (w-4)^2 & = & (u-3)^2 + (v-2)^2 + (w-3)^2 \\ (u-3)^2 + (v-2)^2 + (w-3)^2 & = & (u-3)^2 + (v-1)^2 + (w-4)^2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{r} 2u + 4v - 10w + 18 = 0 \\ -6u - 8v + 2w + 2 = 0 \\ +2v - 2w + 4 = 0 \end{array} \right| \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{r} 4v - 28w + 56 = 0 \\ 2v - 2w + 4 = 0 \end{array} \right|$$

Es ergeben sich die Lösungen: $u = 1, \quad v = 0, \quad w = 2 \quad \Rightarrow \quad M(1|0|2)$

Der Radius kann aus der Länge vom $\overrightarrow{AM}$ berechnet werden: $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 3$

Aufgabe 22

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad AB \parallel CD$: Trapez

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AD}^2 = \sqrt{18}$: gleichschenklig.