

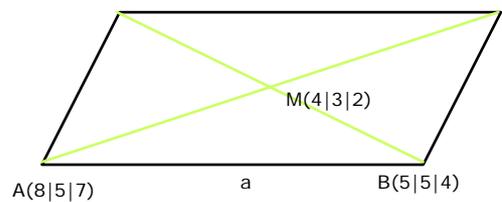
Aufgabe 47

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \\ -(x - 4) \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 - x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 1 + (4 - x)^2 + 4 = 9 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \end{matrix}$$

Aufgabe 48

Der Mittelpunkt ist der Schnitt der Diagonalen.
Diese teilen das Dreieck in vier flächengleiche Stücke.



a) $\vec{MA} \times \vec{MB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$F = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36 + 9 + 36} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 = 18$$

b) $\vec{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \sqrt{9 + 9}$

$$a \cdot h_a = F \Rightarrow h_a = \frac{F}{a} = \frac{18}{\sqrt{18}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Aufgabe 49

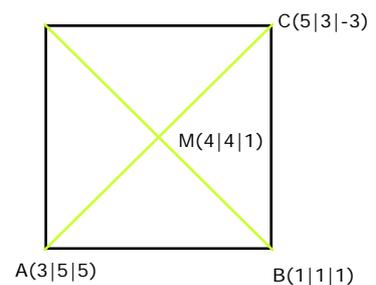
Die Höhe steht senkrecht auf der Quadratfläche,

sie hat die Richtung $\vec{BC} \times \vec{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

dieser Vektor hat die Länge $12 \cdot 3 = 36$.

Für den Höhenvektor gilt: $\vec{h} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

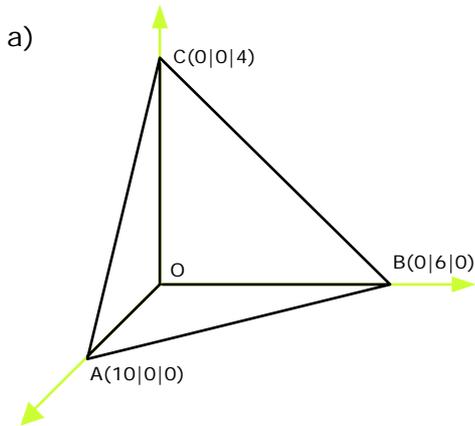
Der Mittelpunkt des Quadrates bzw. der Diagonalen AC $M(4|4|1)$ wird um \vec{h} verschoben:



$$S_1(4 + 6|4 - 6|1 + 3) = S_1(10|-2|4)$$

$$S_2(4 - 6|4 + 6|1 - 3) = S_2(-2|10|-2)$$

Aufgabe 50



$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Die Oberfläche setzt sich aus vier Dreiecksflächen zusammen:

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{24^2 + 40^2 + 60^2} = 38$$

$$F_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 30$$

$$F_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

$$F_{OCA} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 20$$

b) Das Volumen des Tetraeders lässt sich auf verschiedene Arten berechnen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot F_{OAB} \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 4 = 40 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{40}{\frac{1}{3} \cdot 38} = \frac{60}{19}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot F_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 38 \cdot h$$

Aufgabe 51

$P(x|0|0)$ ist ein Punkt auf der x-Achse.

$$\overline{AB} \times \overline{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 + 40 \\ -(-8 - 4x) \\ -20 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4x + 8 \\ -4x - 20 \end{pmatrix}$$

Es ist: $|\overline{AB} \times \overline{AP}|^2 = (2 \cdot 18)^2$

$$576 + (16x^2 + 64x + 64) + (16x^2 + 160x + 400) = 1296$$

$$32x^2 + 224x - 256 = 0$$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

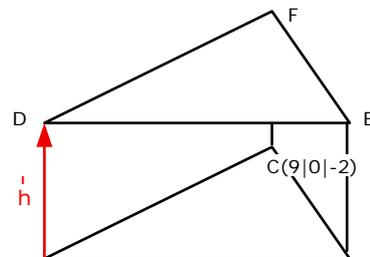
$$(x+8)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(-8|0|0), P_2(1|0|0)$$

Aufgabe 52

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -21 \\ 42 \end{pmatrix} = \vec{g}$$

\vec{g} hat den Betrag und die Länge 49.

Die Grundfläche ABC hat den Inhalt 24.5

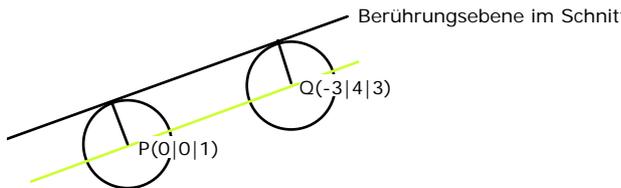


Daraus berechnet sich die Länge der Höhe: $V = 24.5 \cdot h = 343 \Rightarrow h = 14$.

$$\vec{h} = \pm \frac{14}{49} \vec{g} = \pm \frac{2}{7} \vec{g} = \pm \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} D(6 \pm 4 | 8 \text{ m} 6 | 3 \pm 12) & D_1(10 | 2 | 15) & D_2(2 | 14 | -9) \\ E(3 \pm 4 | 2 \text{ m} 6 | 1 \pm 12) & E_1(7 | -4 | 13) & E_2(-1 | 8 | -11) \\ F(9 \pm 4 | 0 \text{ m} 6 | -2 \pm 12) & F_1(13 | -6 | 10) & F_2(5 | 6 | -14) \end{array}$$

Aufgabe 53



Schnitt durch P, Q und die Berührungspunkte der beiden Kugeln. Die dritte Kugel müsste man sich weiter hinten oder vorn vorstellen. Die Berührungsebene kann auch auf der andern Seite der Kugel liegen.

- a) Die Berührungsebene ist parallel zur Ebene PQR und die Berührungsradien stehen senkrecht zu ihr.

$$\text{Richtung des Berührungsradius: } \overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \\ -11 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor hat gerade die Länge 3.

Für die Berührungspunkte B gilt:

$$\overline{OB} = \overline{OP} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1(2|2|0), B_2(-2|-2|2)$$

- b) Das Dreieck der Berührungspunkte hat den gleichen Inhalt wie das Dreieck PQR:

$$I = \frac{1}{2} |\overline{PQ} \times \overline{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{22^2 + 22^2 + 11^2} = \frac{1}{2} \cdot 33 = 16.5$$

- c) Nennen wir die Kugeln P, Q und R: dann gäbe es maximal 8 Berührungsebenen. Da sich die Kugeln P und Q schneiden fallen 2 davon weg und deshalb gibt es nur 6.

P, Q, R "oberhalb" der Berührungsebene
 P, Q, R "unterhalb" der Berührungsebene
 P, Q "oben", R "unten" P, R "oben", Q "unten"
 P, Q "unten", R "oben" P, R "unten", Q "oben" "

R, Q "oben", P "unten" und R, Q "unten", P "oben" fallen weg.