Aufgabe 54

Man denke an die Flächenformel aus der Trigonometrie zur Berechnung eines Parallelogramms aus zwei Seiten und ihrem Zwischenwinkel; dann gilt:

$$F = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\gamma$$

a) es muss gelten: $\sin\gamma = 1 \quad\Rightarrow\quad \gamma = 90°$; die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

b) es muss gelten: $\sin\gamma = 0 \quad\Rightarrow\quad \gamma = 0°$ (oder $=180°$) ; die beiden Vektoren sind parallel.

c) siehe Buch.

Aufgabe 55

Die Punkte liegen in einer Ebene, wenn $\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC} = 0$ (Spatprodukt)

$\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)$ steht senkrecht auf der Ebene, $\overrightarrow{DC}$ liegt in der Ebene, ist also rechtwinklig dazu.

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\7\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = -21+21 = 0$ die Punkte sind komplanar

b) $\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = 4+7-9 \neq 0$ die Punkte sind nicht komplanar

Aufgabe 56

Muss durchgerechnet werden:

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ -b_1c_3 + b_3c_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(-b_1c_3 + b_3c_1) \\ -a_1(b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_2c_3 - b_3c_2) \\ a_1(-b_1c_3 + b_3c_1) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1 \\ -a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 \\ -a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_1 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix}
$$