

### Aufgabe 76

a) Zwei Richtungsvektoren, z. B.  $\overline{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\overline{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Normalenvektor steht senkrecht auf ihnen:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -35 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

In der nun fast vollständigen Ebenengleichung einen Punkt der Ebene einsetzen, z.B. A:

$$3x - 4y + 7z = 9 - 4 + 0 = 5$$

Zur Kontrolle auch B oder C einsetzen!

b) Die Koordinaten des Punktes müssen die Ebenengleichung erfüllen:

$$P(2 | 2 | 1) \in E, \text{ denn: } 6 - 8 + 7 =$$

$$Q(1 | 1 | 1) \notin E, \text{ denn: } 3 - 4 + 7 = 6$$

$$R(0 | 4 | 3) \in E, \text{ denn: } 0 - 16 + 21 = 5$$

### Aufgabe 77

Zwei Richtungsvektoren:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung:  $x + 2y + 2z = 4 - 8 + 3 = -1$

### Aufgabe 78

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; Ebenengleichung:  $4x - y + 3z = 4 - 8 + 3 = -1$

### Aufgabe 79

Parallele Ebenen haben denselben Normalenvektor:  $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\text{Ebenengleichung: } \underset{2}{5x} - \underset{7}{2y} + \underset{1}{8z} = 10 - 14 + 8 = 4$$

### Aufgabe 80

Zwei Richtungsvektoren:  $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Ebenengleichung: } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{2}{2x} - \underset{-2}{2y} + \underset{0}{z} = 4 + 4 + 0 = 8$$

### Aufgabe 81

Die Mittelnormalebene steht senkrecht auf  $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Sie geht durch den Mittelpunkt der Strecke AB:  $M\left(\frac{2+6}{2} \mid \frac{-3+5}{2} \mid \frac{3-1}{2}\right) = (4 \mid 1 \mid 1)$

$$\text{Ebenengleichung: } \underset{2}{x} + \underset{7}{2y} - \underset{1}{z} = 4 + 2 - 1 = 5$$

### Aufgabe 82

$$\text{a) } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_E = -\frac{1}{3}\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 2, c = -4$$

$$\text{b) } d = -\frac{1}{3} \cdot (-9) = 3$$

### Aufgabe 83

$$3x + 2y - 4z - 12 = 0$$

a) Schnitt mit der x-Achse:  $y = z = 0$      $3x - 12 = 0$      $(4 \mid 0 \mid 0)$   
Schnitt mit der y-Achse:  $x = z = 0$      $2y - 12 = 0$      $(0 \mid 6 \mid 0)$   
Schnitt mit der z-Achse:  $x = y = 0$      $-4z - 12 = 0$      $(0 \mid 0 \mid -3)$

b)  $s_2$  liegt in der yz-Ebene:  $x = 0$      $2y - 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow y - 2z - 6 = 0$

### Aufgabe 84

$S_1$  von E:  $6x - 10y - 30 = 0$      $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$S_1$  von F:  $5x + 3y - 60 = 0$      $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 15 - 15 = 0 \Rightarrow$  die Spuren stehen senkrecht aufeinander.

### Aufgabe 85

$A(2 \mid 3 \mid 7)$ ,  $B(-2 \mid 4 \mid 5)$

a) durch A, parallel zur xy-Ebene:  $z = 7$   
durch A, parallel zur yz-Ebene:  $x = 2$   
durch A, parallel zur xz-Ebene:  $y = 3$

b)  $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

parallel zur x-Achse:  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$      $2y + z = 13$   
 $\begin{matrix} 3 & 7 \end{matrix}$

parallel zur y-Achse:  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$      $x - 2z = -12$   
 $\begin{matrix} 2 & 7 \end{matrix}$

parallel zur z-Achse:  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$      $x + 4y = 14$   
 $\begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix}$

c) Alle Ebenen gehen durch den Nullpunkt; die Konstante ist Null.

$$\text{Durch B, parallel zur x-Achse: } \overline{OB} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 5y - 4z = 0$$

$$\text{Durch B, parallel zur y-Achse: } \overline{OB} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 5x + 2z = 0$$

$$\text{Durch B, parallel zur z-Achse: } \overline{OB} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0$$

d) durch A, B und den Ursprung:  $\overline{OA} \times \overline{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -24 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow 13x + 24y - 14z = 0$

### Aufgabe 86

$$ux + vy + w = x + 2y + 7z + 3 \Leftrightarrow x(u-1) + y(v-2) - 7z + (w-3) = 0$$

- a) Parallelebenen zur x-Achse haben die Form:  $ay + bz + c = 0$  also:  $u = 1$
- b) Parallelebenen zur xy-Ebene haben die Form:  $cz + d = 0$  also:  $u = 1, v = 2$
- c) Ebenen durch O haben die Form:  $ax + by + cz = 0$  also:  $w = 3$
- d) Ebenen durch die x-Achse haben die Form:  $ay + bz = 0$  also:  $u = 1, w = 3$
- e) Die xy-Ebene hat die Form:  $z = 0$  also  $u = 1, v = 2, w = 3$

### Aufgabe 87

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - 1 - 4 = -4 \quad |-4| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 41.8^\circ$

Sinus bei Winkeln zwischen Geraden und Ebenen!

b) Koordinaten aus der Geradengleichung in der Ebenengleichung einsetzen:

$$t - t + 2(5 - 2t) - 6 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow D(1 | 1 | 3)$$