Gesucht ist der Zwischenwinkel zweier Vektoren, von denen man weiss:

a) $a = \frac{b}{2} \neq 0, \quad \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$

b) $a = 6, \quad b = 4, \quad (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 4\vec{b}) = -60$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0, \quad \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 0$

Zur Erinnerung: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a \cdot \cos 0^o = a \cdot a \cdot 1 = a^2$

a) $a = \frac{b}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad b = 2a$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$
$$a^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$a^2 - a \cdot b \cdot \cos\gamma = 0 \qquad \text{wir setzen } b = 2a \text{ ein}$$
$$a^2 - a \cdot 2a \cdot \cos\gamma = 0$$
$$a^2 - 2a^2 \cdot \cos\gamma = 0 \quad \Big| : a^2$$
$$1 - 2\cos\gamma = 0$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \mathbf{60^o}$$

---

b)
$$(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 4\vec{b}) = -60$$
$$2a^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 12b^2 = -60$$
$$2a^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 12b^2 = -60$$
$$2a^2 - 5 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma - 12b^2 = -60$$

Wir setzen nun $a = 6, \quad b = 4$ ein und erhalten eine Gleichung für γ.

$$72 - 120\cos\gamma - 192 = -60$$
$$-120\cos\gamma = 60$$
$$\cos\gamma = -0.5 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \mathbf{120^o}$$

---

c) Wir nehmen uns zuerst der ersten Gleichung an:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$$
$$a^2 = b^2$$
$$a = b$$ Vektorbeträge sind immer positiv!

Die zweite Gleichung formen wir um und setzen $a = b$

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) = 0$$
$$a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$
$$a^2 + 2a\cdot b\cdot\cos\gamma = 0$$
$$a^2 + 2a\cdot a\cdot\cos\gamma = 0$$
$$a^2 + 2a^2\cdot\cos\gamma = 0$$
$$2a^2\cdot\cos\gamma = -a^2$$
$$\cos\gamma = -0.5 \quad\Rightarrow\quad \gamma = \mathbf{120^o}$$