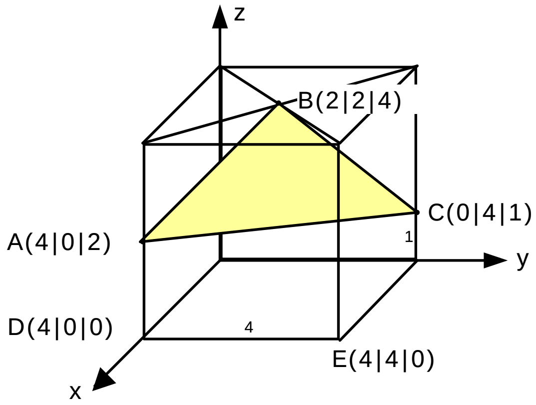
A ist Kantenmittelpunkt des Würfels (s. Figur).

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

---

a) Wir schreiben die Koordinaten der Punkte an und berechnen daraus die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(Die Komponenten könnte man auch direkt aus der Figur ablesen.)



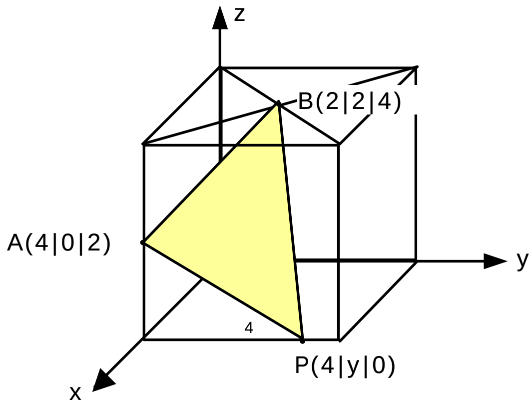
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{100+100+0} = \frac{1}{2}\sqrt{200} = \frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$$

A ist Kantenmittelpunkt des Würfels (s. Figur).

b) Ein Punkt P liegt auf der Kante DE.

Welche Koordinaten hat P, wenn die Fläche des Dreiecks APB den Inhalt $F = 2\sqrt{6}$ hat?



b) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+4 \\ -(0-4) \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+4 \\ 4 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Wir berechnen das Quadrat der Flächen:

$$(2y+4)^2 + 16 + 4y^2 = (2 \cdot 2\sqrt{6})^2$$

Parallelogramm = doppeltes Dreieck

$$(4y^2 + 16y + 16) + 16 + 4y^2 = 96$$

$$8y^2 + 16y - 64 = 0$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(y+4)(y-2) = 0$$

$y_1 = -4$ liegt nicht auf der Kante

$y_2 = 2$ $P(4|2|0)$