Der Normalenvektor ist bekannt: bestimmen Sie die Ebenengleichung.

a) Die Ebene enthält den Punkt $P(2|0|5)$ und hat den Normalenvektor n.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) die Ebene geht durch $A(5|3|1)$ und steht senkrecht auf der Geraden g.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Die Ebene ist parallel zur Ebene 5x-3y+z=7 und geht durch $A(6|7|-5)$.

d) Gesucht ist die Normalebene durch den Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(3|-5|8)$ und $B(7|5|2)$

Merken Sie sich unbedingt: $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z = d$ hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$.

---

a) Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ergibt die linke Seite der Ebenengleichung:

$$5x + 3y - 4z =$$

Die Gleichung muss für alle ihre Punkte gelten, also auch für $P(2|0|5)$;
wir setzen diesen Punkt in die Ebenengleichung ein und berechnen die rechte Seite:

$$\underset{2}{\mathbf{5x}} + \underset{0}{\mathbf{3y}} - \underset{5}{\mathbf{4z}} = 10 + 0 - 20 = -\mathbf{10}$$

Tipp: schreiben Sie die Punktkoordinaten mit Bleistift unter die Ebenengleichung; Sie vermeiden so Flüchtigkeitsfehler.

b) Die Ebene geht durch $A(5|3|1)$ und steht senkrecht auf der Geraden g.

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn die Ebene senkrecht auf der Geraden g steht, dann steht der Richtungsvektor der auch senkrecht auf der Ebene;

es ist also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Ansatz für die Ebenengleichung ist: $2x - 2y + z = .$

$A(5 \mid 3 \mid 1)$ ist ein Punkt der Geraden und deshalb auch der Ebene.

$$\underset{5}{\mathbf{2x}} - \underset{3}{\mathbf{2y}} + \underset{1}{\mathbf{z}} = 10 - 6 + 1 = \mathbf{5}$$

---

c) Die Ebene ist parallel zur Ebene 5x-3y+z=7 und geht durch $A(6|7|-5)$.

Parallele Ebenen haben denselben Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{6}{\mathbf{5x}} - \underset{7}{\mathbf{3y}} + \underset{-5}{\mathbf{z}} = 30 - 21 - 5 = \mathbf{4}$$

---

d) Gesucht ist die Normalebene durch den Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(3|-5|8)$ und $B(7|5|2)$

Die beiden Punkte ergeben den Mittelpunkt $M\left(\frac{3+7}{2} \middle| \frac{-5+5}{2} \middle| \frac{8+2}{2}\right) = (5|0|5)$

und den Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$, den wir verkürzen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\underset{5}{\mathbf{2x}} + \underset{0}{\mathbf{5y}} - \underset{5}{\mathbf{3z}} = 10 + 0 - 15 = -\mathbf{5}$$