Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Schnittgeraden der Ebenen E und F:
a) E: x-y+z=6, F: x+y-4z=-2
b) E: x+2y-z=-4, F: x-4y+z=2

---

a) 3 Unbekannte, nur 2 Gleichungen!

$$\left| \begin{array}{rcr} x - y + \ z & = & 6 \\ x + y - 4z & = & -2 \end{array} \right|$$

Für ein eindeutiges Lösungstripel haben wir eine Gleichung zu wenig. Allerdings haben zwei Ebenen in unserm Falle auch nicht nur einen gemeinsamen Punkt sondern unendlich viele, alle Punkte der Schnittgeraden.
Wir brauchen nur zwei dieser Punkte, um die Geradengleichung aufzustellen.
Für diese können wir irgendeine zusätzliche Bedingung aufstellen (wenigstens, wenn die Schnittgerade nicht eine spezielle Lage hat):

z. B. $x = 0$

Das Gleichungssystem hat nun 2 Unbekannte und 2 Gleichungen und kann gelöst werden:

$$\left| \begin{array}{rcr} y + \ z & = & 6 \\ y - 4z & = & -2 \end{array} \right|$$

Dieses System hat die Lösungen $z = -\frac{4}{3}$ und $y = -\frac{14}{3}$, die, wie man sieht, oft in Bruchform daherkommen! Für den zweiten Punkt müsste das Verfahren mit einer andern Vorgabe (z. B. $x = 1$ oder $y = 0$) wiederholt werden!

Mehr Chancen auf ganzzahlige Lösungen hat man, wenn man zuerst eine Unbekannte eliminiert, möglichst eine, die nur 1 mal dasteht:

$$\left| \begin{array}{rcr} x - y + \ z & = & 6 \\ x + y - 4z & = & -2 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3z & = & 4 \\ 2x & = & 4 + 3z \end{array}$$

Jetzt gelingt es mit wenig Aufwand zwei z-Werte so zu finden, dass auch der x-Wert ganzzahlig ist:

z. B. $z = 0 \quad x = 2 \quad y = -4$
$z = 2 \quad x = 5 \quad y = 1$

(Wegen $y = 4z - x - 2$ aus F ist dann auch y ganzzahlig.)

Durch die beiden Punkte $P(2 \mid -4 \mid 0)$ und $Q(5 \mid 1 \mid 2)$

geht die Gerade mit der Gleichung $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Am einfachsten eliminiert man z:

$$\left| \begin{array}{rcr} x + 2y - z & = & -4 \\ x - 4y + z & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{rcr} 2x - 2y & = & -2 \\ x & = & y - 1 \end{array}$$

hier hat man überhaupt keine Probleme:

z. B. $y = 0 \quad x = -1 \quad z = 3$

$y = 1 \quad x = 0 \quad z = 6$

Durch $P(-1 \mid 0 \mid 3)$ und $Q(0 \mid 1 \mid 6)$ geht die Gerade: $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$