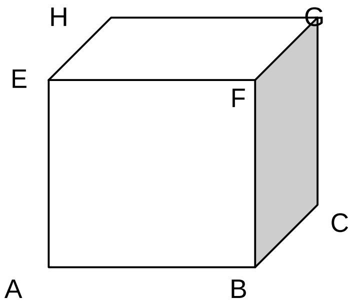
Der Würfel ABCDEFGH ist gegeben durch:



Ebene ABCD $E_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ebene ABEF $E_2: \; 2x - y - 2z + 4 = 0$

Ebene ADEH $E_3: \; 2x + 2y + z - 11 = 0$

und den Punkt $G(1|10|7)$

Berechnen Sie die Koordinaten der Ecken A und B sowie das Volumen des Würfels.

E_1 ist eine Parametergleichung der Ebene:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind Richtungsvektoren, die in der Ebene liegen,

$(-1|5|12)$ ist ein Punkt der Ebene.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_3: \; x - 2y + 2z = -1 - 10 + 24 = 13$$

Den Schnittpunkt A erhalten wir, indem wir das System der drei Ebenengleichungen auflösen:

$$\left| \begin{array}{rcl} x - 2y + 2z &=& 13 \\ 2x - y - 2z &=& -4 \\ 4x + 4y + 2z &=& 22 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} 3x - 3y &=& 9 \\ 6x + 3y &=& 18 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 5 \end{array} \qquad \mathbf{A\,(3\,|\,0\,|\,5)}$$

Um die Koordinaten von B zu berechnen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Hier bestimmen wir zuerst den Vektor $\overrightarrow{GH}$.

Senkrechte zu E_3 durch G: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E_3:

$$\begin{aligned} 2(1+2t)+2(10+2t)+(t+7)-11 &= 0 \\ 9t+18 &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{GH} = -2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OAB} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 0+4 \\ 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

also: $\mathbf{B(7 \,|\, 4 \,|\, 7)}$

Das Volumen des Würfels berechnet sich aus der Kantenlänge von $\overrightarrow{AB}$:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+16+4} = 6$ und damit gilt: $\mathbf{V = 6^3 = 216}$