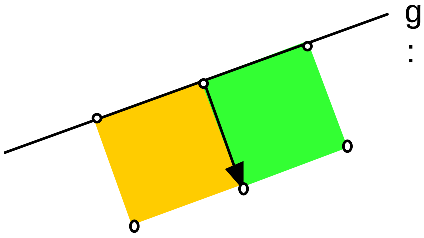
Die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt C(-1|0|3) sind gegeben.

a) Bestimmen Sie auf g zwei Punkte D und E sowie einen weiteren Punkt F (nicht auf g), dass CDEF ein Quadrat wird. [Es genügt, eines der möglichen Quadrate finden.]

b) CDEF aus a) ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Spitze S. Das Volumen der Pyramide beträgt 72. Wie lauten die Koordinaten der Spitze S.

[Matur TSME 02, Aufgabe 3]

---




$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Der Punkt D auf der Geraden hat die Koordinaten $D\,(1+2t\,|\,5-t\,|\,-1+2t)$

Der Vektor $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+2t \\ 5-t \\ -1+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2t \\ -5+t \\ 4-2t \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur Geraden:

$$\begin{pmatrix} -2-2t \\ -5+t \\ 4-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\,(-2-2t) - (-5+t) + 2\,(4-2t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

**D (3|4|1)** und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; die Länge von $\overrightarrow{DC}$ ist 6.

Der Richtungsvektor der Geraden hat die Länge 3, deshalb ist $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E\,(7\,|\,2\,|\,5)$ und $F\,(3\,|\,-2\,|\,7)$

$E'\,(-1\,|\,6\,|\,-3)$ und $F'\,(-5\,|\,2\,|\,-1)$

b) Die Grundfläche der Pyramide ist $3^2 = 9$ , also $V = 72 = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = 6$

Die Höhe geht durch den Mittelpunkt des Quadrates: $M\left(\frac{-1+7}{2} \middle| \frac{0+2}{2} \middle| \frac{3+5}{2}\right) = M(3|1|4)$

Sie steht senkrecht zur Quadratebene: $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Länge 3!)

Der Höhenvektor muss doppelt so lang sein: $\overrightarrow{MS} = \pm 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Für S erhalten wir zwei Lösungen: $S_1\,(1|5|8)$ und $S_2\,(5|-3|0)$

Für das andere Quadrat ergibt sich: $M'\,(-1|3|0)$, $S_1'\,(-3|7|4)$, $S_2'\,(1|-1|-4)$