Die Geraden a: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und b: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

a) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden a und b.

b) In welchen Punkten S_a bzw. S_b schneiden die beiden Geraden die xy-Ebene?

Die Szenerie wird mit parallelem Licht beschienen. Dabei werfen die Geraden a und b Schatten a' und b' auf die xy-Ebene.

c) Die Schatten a' und b' schneiden sich im Punkt T(9|3|0).

Aus welcher Richtung $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ kommt das parallele Licht?

[Matur TSME 02, Aufgabe 1]

---

a) Da die Richtungsvektoren nicht parallel sind, müssen die Geraden sich schneiden oder windschief sein; wir versuchen einen allfälligen Schnittpunkt zu berechnen:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2+2t &=& 2+4s \\ 1-\ \ t &=& -1+7s \\ 9-\ \ t &=& 5+5s \end{array} \right|$$

aus der 2. und 3. Gleichung lässt sich durch Subtraktion t eliminieren:

$$8 = 6 - 2s \quad \Rightarrow \quad s = -1 \quad \Rightarrow \quad t = 9$$

diese Ergebnisse setzen wir in der 1. Gleichung ein: $2 + 18 \neq 2 - 4$

Kein Schnittpunkt! die Geraden sind windschief!

b) Schnitt mit der xy-Ebene für $z = 0$

a: $9 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 9 \quad \Rightarrow \quad S_a\,(20|-8|0)$

b: $5 + 5t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad S_b\,(-2|-8|0)$

c) Die Gerade, ihr Schatten, die Lichtrichtung und die Lichtquelle T bilden eine Ebene; von dieser Ebene kennen wir die Gerade a und den Punkt T:

Richtungsvektoren der Ebene sind: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{TA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

das ergibt den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

das gleiche gilt für die Gerade b und T:

Richtungsvektoren der Ebene sind: $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{TB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

das ergibt den Normalenvektor $\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55 \\ 55 \\ -33 \end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Lichtrichtung ist zu beiden Ebenen parallel, also gleich der Richtung der Schnittgeraden der Ebenen; die Richtung der Schnittgeraden ihrerseits steht senkrecht zu den Normalenvektoren der Ebenen:

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Die Richtung der Schnittgeraden ist: $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$