[Rychenberg Winterthur, Typus A, 1989]

$A\left(0\,|\,0\,|\,1\right)$, $B\left(4\,|\,4\,|\,3\right)$, $g:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\3\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

a) Sei C der Punkt auf der Geraden für $t=0$. Berechne vom Dreieck ABC den Winkel bei A und den Flächeninhalt.

b) Für welchen Punkt D auf der Geraden g ist das Dreieck ABD bei A rechtwinklig?

c) Ein Lichtstrahl geht von A aus, wird an der Grundrissebene $z=0$ reflektiert und trifft danach den Punkt B. Wo liegt der Reflexionspunkt?

d) Bestimme die Transversale der beiden Geraden AB und g durch den Ursprung.

---

a) $C(12\,|\,3\,|\,-3)$, $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}12\\3\\-4\end{pmatrix}$

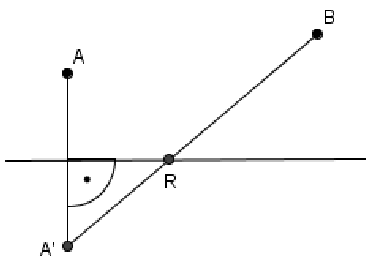
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=52=6\cdot 13\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha=48.2°$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}22\\-40\\36\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \text{Fläche } F=\tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\tfrac{1}{2}\sqrt{3380}=13\sqrt{5}$$

b) $D(12+t\,|\,3+4t\,|\,-3+3t) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}12+t\\3+4t\\-4+3t\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4(12+t)+4(3+4t)+2(-4+3t)=0 \quad\Rightarrow\quad t=-2 \quad\Rightarrow\quad D(10\,|\,-5\,|\,-9)$$

c) A wird an der Grundrissebene gespiegelt: $A'(0\,|\,0\,|\,-1)$



Gerade A'B: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$

Schnitt mit $z=0$: $\quad -1+4t=0 \quad\Rightarrow\quad t=\tfrac{1}{4}$

Reflexionspunkt: $R(1\,|\,1\,|\,0)$

d) Alle Geraden, die durch den Ursprung gehen und die Gerade AB schneiden liegen in der Ebene E_{ABO}:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_{ABO}: \ x - y = 0$$

Schnitt mit der Geraden g ergibt den zweiten Punkt S der Transversale:

$$(12 + t) - (3 + 4t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \quad \Rightarrow \quad S(15 \mid 15 \mid 6)$$

Die gesuchte Transversale ist die Gerade OS: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$