Ein Tetraeder hat die Spitze S(6|7|-1). Seine Grundfläche wird durch die Punkte A(5|7|-3), B(6|6|-2) und C(10|3|-6) gebildet.

a) Berechnen Sie Volumen V und Grundfläche G dieser Pyramide (exakt!)

b) Die Länge der durch S gehenden Höhe h der Pyramide lässt sich auf mindestens drei Arten berechnen.
Beschreiben Sie kurz die drei Verfahren und führen Sie eines davon durch (exakt!).

c) Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen ABC und ABS ?

d) Berechnen Sie den Abstand des Spitze S von der Kante AB exakt.

---

a) $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G = \tfrac{1}{2}\sqrt{49+64+1} = \frac{\sqrt{114}}{2}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 + 2 = 9 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{9}{6} = 1.5$$

b) 1. Hesseformel für den Abstand S von der Ebene ABC:

$$h = \frac{7x + 8y + 7z - 88}{\sqrt{114}} = \frac{42 + 56 - 1 - 88}{\sqrt{114}} = \frac{9}{\sqrt{114}}$$

2. Aus Volumen und Grundfläche:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} \Rightarrow h = \frac{3V}{G} = \frac{4.5 \cdot 2}{\sqrt{114}} = \frac{9}{\sqrt{114}}$$

3. Normale zur Ebene ABC durch S, Höhenfusspunkt H, Länge $\overrightarrow{SH}$:

$$\left.\begin{matrix} 7x - 8y + z - 88 = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad 7(6+7t) + 8(7+8t) + (-1+t) - 88 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\tfrac{9}{114}$$

$$\overrightarrow{SH} = -\tfrac{9}{114}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\,\overrightarrow{SH}\,| = \tfrac{9}{114}\sqrt{49+64+1} = \tfrac{9}{114}\sqrt{114} = \frac{9}{\sqrt{114}}$$

c) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 21 = \sqrt{114} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36.6^{o}$$

d) Fläche ABS $= \sqrt{6}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$ $\quad d = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$