Gegeben sind die Ecken A(-1|1|-3) und D(2|2|1), eines Parallelogramms.

die Ecke B liegt auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

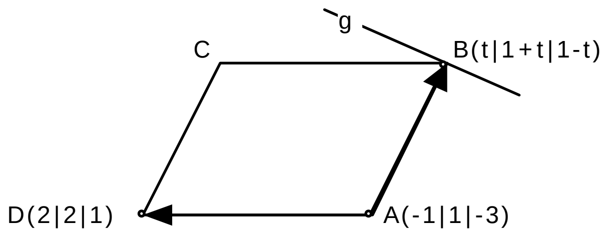
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Ecke B für den Fall $t = 2$.
Wo liegt dann die Ecke C?

b) Für welches t ist die Fläche des Parallelogramms $A = \sqrt{3}$?

c) Für welches t ist die Fläche des Parallelogramms möglichst klein?

d) Zeigen Sie, dass es kein t gibt, so dass das Parallelogramm zu einem Rechteck wird? (Begründen!)

[Matur TSME 2000, Flü]



$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 4-t \end{pmatrix}$

a) Für $t = 2$ ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C\,(\,5 \mid 4 \mid 3\,)}$

b) Aus dem Vektorprodukt $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 4-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5t \\ -8+7t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$

lässt sich die gegebene Fläche $A = \sqrt{3}$ berechnen:

$$\sqrt{(4-5t)^2 + (-8+7t)^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{3}$$
$$(4-5t)^2 + (-8+7t)^2 + (2t-1)^2 = 3$$
$$78t^2 - 156t + 81 = 3$$
$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t-1)^2 = 0$$
$$\mathbf{t} = \mathbf{1}$$

c) Es soll das Minimum der Funktion

$A(t) = \sqrt{(4-5t)^2 + (-8+7t)^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{78t^2 - 156t + 81}$ bestimmt werden.

Eine Wurzelterm ist extremal, wenn der Radikand extremal ist; es genügt, wenn wir den Radikanden ableiten und gleich Null setzen.

$$156\,t - 156 = 0$$
$$\mathbf{t} = \mathbf{1}$$

d) Wenn das Parallelogramm ein Rechteck ist, dann stehen $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AB}$ rechtwinklig aufeinander:

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 4-t \end{pmatrix} = 3 + 3t + t + 16 - 4t = \mathbf{19} = \mathbf{0} \quad \text{Unmöglich!}$$