[Frauenfeld, 7gb, 1990]

Gegeben: $A(14|10|1)$, $B(8|13|19)$ Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ s \end{pmatrix}$

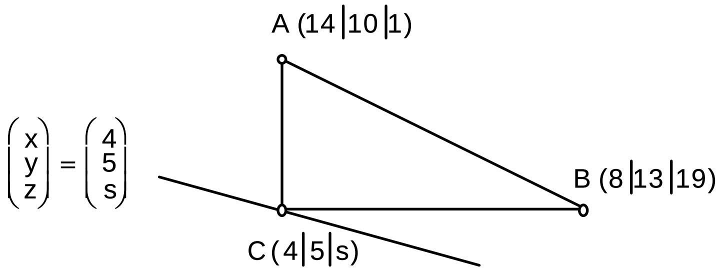
a) Bestimmen Sie einen Punkt C auf der Geraden g so, dass das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat. (Bei mehreren Möglichkeiten wähle man den Punkt C, der die grösste z-Koordinate hat).

b) Spiegeln Sie den Nullpunkt O an der Ebene $\varepsilon(ABC)$; der gespiegelte Punkt heisse O'.

c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers OABCO'.

---

a)



$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ s-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ s-19 \end{pmatrix} = 40 + 40 + (s-1)(s-19) = 0$$

$$s^2 - 20s + 99 = 0$$
$$(s-11)(s-9) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 11, \quad s_2 = 9$$

$C(4|5|11)$

b) Dazu brauchen wir die Ebene ABC:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ -120 \\ 60 \end{pmatrix} \,/\!/\, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_{ABC}: \quad 2x - 2y + z = 28 - 20 + 1 = 9$$

Lotgerade durch O zur Ebene: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt: $4t + 4t + t = 9 \quad \Rightarrow \quad t = 1$

Schnitt für $t = 1$, O' für $t = 2$: $O'(4|-4|2)$

c) Der Körper ist eine Doppelpyramide mit dem Dreieck ABC als Grundfläche und den symmetrischen Spitzen O und O'.

Wir können <u>elementar</u> rechnen: $V = \frac{1}{3}Gh$

G ist die Dreiecksfläche; unter b) haben wir gerechnet: $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ -120 \\ 60 \end{pmatrix}$

$G = \frac{1}{2}\sqrt{14400 + 14400 + 3600} = 90$

h ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, der ja senkrecht auf E_{ABC} steht: $h = 6$

$V = 180$

Wir können aber auch das <u>Spatprodukt</u> benützen:

$$V = 2 \cdot \tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}\ \overrightarrow{OC}\right) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 177 \\ -258 \\ 102 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = 180$$