[Kantonsschule Rychenberg Winterthur, Typus B, 1989]

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_1, welche durch $A(2|1|0)$ und $B(9|5|4)$ geht und senkrecht zur Ebene $E:\ 2x-2y+z-11=0$ steht.

b) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A' von A bezüglich E.

c) Für welche Punkte P auf der x-Achse ist $\measuredangle APB = 90°$?

d) Welche Punkte auf g: $g:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ haben von E und der yz-Ebene gleiche Abstände?

---

a) Wenn E_1 senkrecht auf E steht, dann muss der Normalenvektor von E ein Richtungsvektor von E_1 sein. Einen weiteren Richtungsvektor gewinnt man aus den Punkten A und B:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 12x + y - 22z = 25$$

b) Lot auf E durch A: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $2(2+2t) - 2(1-2t) + t - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$

Für $t = 1$ gelangt man auf der Lotgeraden von A bis zum Durchstosspunkt

Für $t = 2$ gelangt man auf der Lotgeraden von A bis A': $D'(6|-3|2)$

c) Der Punkt P auf der x-Achse hat die Koordinaten $P(x|0|0)$

Es muss gelten: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-x \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (2-x)(9-x) + 5 = 0$

Die Gleichung $x^2 - 11x + 23 = 0$ hat zwei Lösungen: $x_1 \approx 8.192 \quad \Rightarrow \quad P_1(8.192|0|0)$

$x_2 \approx 2.807 \quad \Rightarrow \quad P_2(2.807|0|0)$

d) Die yz-Ebene hat die Gleichung $x = 0$

Wir bestimmen mit der Hesse-Formel die winkelhalbierenden Ebenen:

$$\frac{2x - 2y + z - 11}{3} = \pm x$$
$$2x - 2y + z - 11 = \pm 3x$$

Schnitt mit der Geraden g:

$$2(1+3t) - 2(2+2t) + (-t) - 11 = \pm 3(1+3t)$$
$$-13 + t = \pm 3 \pm 9t$$

$t_1 = -2 \qquad Q_1(-5|-2|2)$

$t_2 = 1 \qquad Q_2(4|4|-1)$