[Matur TSME, 1997, Flü]

Gegeben sind: die Gerade g durch $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

sowie die Ebene Φ durch $A(1|-5|0)$, $B(0|3|3)$ und $C(2|2|3)$;

Bestimmen Sie:

a) den Durchstosspunkt S von g durch Φ

b) den Schnittwinkel φ zwischen g und Φ

c) Die Gerade g wird an der Ebene Φ gespiegelt.
Berechnen Sie die Gleichung der Spiegelgeraden g'.

d) Welche Punkte der Geraden g haben von Φ den Abstand $\sqrt{30}$?

---

a) Als erstes müssen wir die Gleichung der Ebene Φ bestimmen:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x + 2y - 5z = -9$$

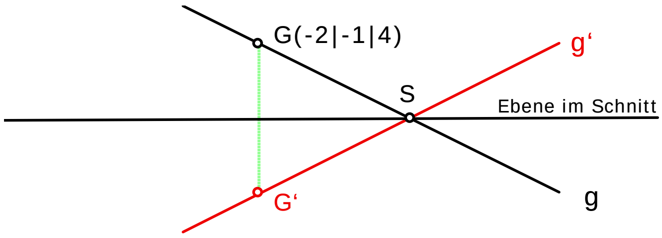
(Setzen Sie der Reihe nach A, B, C ein; ein Rechenfehler würde sich hier fatal auswirken!)

Durchstosspunkt: $(-2+3t) + 2(-1+t) - 5(4-2t) = -9 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad S(1|0|2)$

b) Schnittwinkel ist der Komplementwinkel des Normalenvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ der Ebene und des Richtungsvektors der Geraden $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; deshalb steht im folgenden Skalarprodukt der Sinus.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 15 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{30} \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 47°$$

c)



Wir bestimmen den Spiegelpunkt G' von G; aus G' und S lässt sich die Gleichung der Spiegelgeraden g' berechnen.

Senkrechte zur Ebene durch g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der Ebene: $(-2+t) + 2(-1+2t) - 5(4-5t) = -9 \quad \Rightarrow \quad t = 0.5$

Für $t = 1$ kommen wir von G aus auf der Lotgeraden bis zum Durchstosspunkt;
Für $t = 2$ kommen wir von G aus auf der Lotgeraden bis G': $G(-1|1|-1)$

Gerade $g' = G'S$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) Punkte auf g haben die Koordinaten: $(-2+3t|-1+t|4-2t)$

Diesen Punkt setzen wir in der Hesse-Formel ein:

$$\frac{(-2+3t) + 2(-1+t) - 5(4-2t) + 9}{\sqrt{30}} = \pm\sqrt{30}$$

$$t = 1 \pm 2$$

Wir erhalten für die gesuchten Punkte: $t_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad P_1(7|2|-2)$
$t_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad P_2(-5|-2|6)$