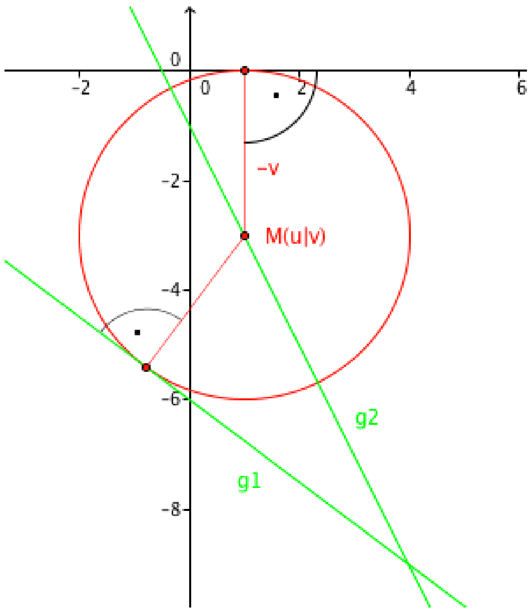
Ein Kreis berührt x-Achse und die Gerade g_1: $3x + 4y + 24 = 0$

und hat den Mittelpunkt auf der Geraden g_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Beginnen Sie mit einer guten Skizze!
Sie muss nicht massstäblich sein: zuerst der gesuchte Kreis, dann die x-Achse mit Berührungsradius, dann g_1 als Tangente mit Berührungsradius und schliesslich g_2 durch den Mittelpunkt.



Die Eigenschaft "Berührung x-Achse" ergibt:

$$r = \pm v$$

je nachdem, ob der Mittelpunkt unter- oder oberhalb der x-Achse liegt.

M(u|v) liegt auf g_2:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u &= t - 1 \\ v &= -2t + 1 \end{aligned}$$

Die Elimination von t ergibt: $2u + v + 1 = 0$ ①

Der Abstand des Punktes M(u|v) von der Geraden g_1 muss gleich $r = \pm v$ sein;
In der Ebene lässt sich die Abstandsformel von Hesse für Geraden und Punkte benützen:

$$\frac{3u + 4v + 24}{\sqrt{9 + 16}} = +v \qquad \text{oder} \qquad \frac{3u + 4v + 24}{\sqrt{9 + 16}} = -v$$

$$3u + 4v + 24 = 5v \qquad\qquad 3u + 4v + 24 = -5v$$

$$3u - v + 24 = 0 \qquad\qquad 3u + 9v + 24 = 0 \qquad ②$$

Aus den beiden Gleichungssystemen ergeben sich u und v:

$$\left| \begin{aligned} 2u + v + 1 &= 0 \\ 3u - v + 24 &= 0 \end{aligned} \right| \qquad \text{bzw:} \qquad \left| \begin{aligned} 2u + v + 1 &= 0 \\ 3u + 9v + 24 &= 0 \end{aligned} \right|$$

$$u = -5,\ v = 9 \qquad\qquad u = 1,\ v = -3$$

$$(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 81 \qquad\qquad (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$$