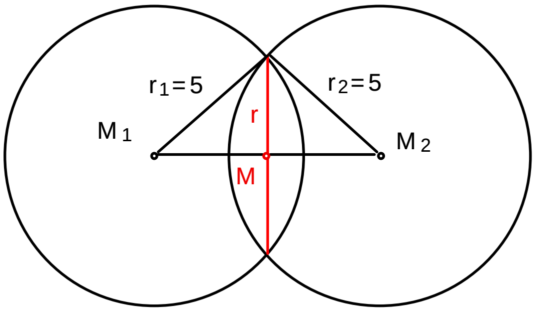
Bestimmen Sie vom Schnittkreis der beiden Kugeln Mittelpunkt und Radius sowie die Gleichung der Ebene, die den Schnittkreis enthält.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

$(x-8)^2 + y^2 + z^2 = 25$

Die Aufgabe ist relativ einfach, weil die Kugeln gleich gross sind:



Rot ist ein Radius und der Mittelpunkt des Schnittkreises.

Der Kreismittelpunkt M ist der Mittelpunkt der Strecke M_1M_2

$$\begin{matrix} M_1\,(0|0|0) \\ M_2\,(8|0|0) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M\,(4|0|0)}$$

Weiter ist: $\overrightarrow{M_1M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = 4$

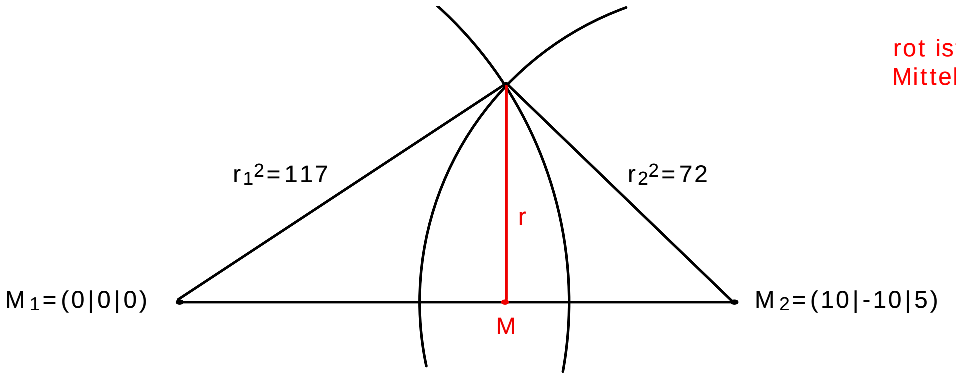
Damit lässt sich der Radius des Schnittkreises mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen: $r^2 = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = 3}$

Die Ebene des Schnittkreises steht normal zu $\overrightarrow{M_1M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und geht durch $M(4|0|0)$:

$$4x + 0y + 0z = 4 \cdot 4 + 0 + 0 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

b) $k_1: \; x^2 + y^2 + z^2 = 117$

$k_2: \; (x-10)^2 + (y+10)^2 + (z-5)^2 = 72$



rot ist ein Radius und der Mittelpunkt des Schnittkreises.

Es ist: $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ und damit ist der Abstand der Kreismittelpunkte 15

Die Zeichnung zeigt ungefähr die richtigen Streckenverhältnisse.

Wenn wir die beiden Kreisgleichungen voneinander subtrahieren erhalten wir die Gleichung der Ebene, die den Schnittkreis enthält:

$$\begin{array}{rl} x^2 + y^2 + z^2 \qquad\qquad\qquad\quad & = \;\; 117 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 20y - 10z & = -153 \\ \hline 20x - 20y + 10z & = \;\; 270 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{2x - 2y + z = 27}$$

(Alle drei Gleichungen enthalten die Punkte des Kreises in der Lösungsmenge)

M erhalten wir. indem wir die Gerade M_1M_2 mit der Ebene schneiden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 2t - 2 \cdot (-2t) + t = 27 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(6|-6|3)}$$

Der Abstand M_1M ist 9 und es gilt: $r^2 = 117 - 81 = 36 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = 6}$