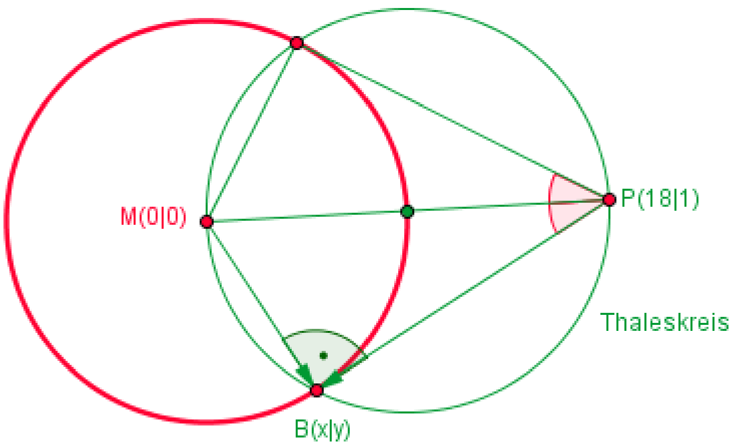
Unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten, die von $P(18 \mid 1)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 100$ gelegt werden?

Die Aufgabe wird hier ohne die Verwendung der Polaren gelöst.



Wir folgen der klassischen Konstruktion und berechnen die Gleichung des Thaleskreises:

Mittelpunkt: $M'(9 \mid 0.5)$

Radius: $r'^2 = 9^2 + 0.5^2 = 81.25 \quad \Rightarrow \quad k': \ (x-9)^2 + (y-0.5)^2 = 81.25$

Koordinatenform: $x^2 + y^2 - 18x - y = 0$

Berechnung der Schnittpunkte der beiden Kreise:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100 \\ x^2 + y^2 - 18x - y = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 18x + y = 100 \quad \Rightarrow \quad y = 100 - 18x$$

Die durch Subtraktion gewonnene Gleichung setzen wir in der 1. Kreisgleichung ein:

$$x^2 + (100 - 18x)^2 = 100$$
$$325x^2 - 3600x + 9900 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6, \quad x_2 = \tfrac{66}{13} \qquad \text{(TR)}$$

Die Koordinaten von B sind: $B(6 \mid -8)$

Berechnung des halben gesuchten Winkels:

$$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} -18 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -18 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \end{pmatrix} = 216 + 9 = 225 = \sqrt{325} \cdot \sqrt{225} \cdot \cos\tfrac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\alpha}{2} = 33.7° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 67.4°$$

Variante für die Berechnung der Kreisgleichung:

Die Vektoren $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} x\text{-}18 \\ y\text{-}1 \end{pmatrix}$ müssen senkrecht aufeinander stehen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 18 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 18x + y^2 - y = 0$$