[TSME, Matur BDE, 1996]

a) Kreis in der Ebene: ein Kreis k ist durch die Gleichung $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ gegeben. Durch $2x-y=8$ ist zudem eine Gerade g definiert. Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten an k in den Schnittpunkten von g und k .

b) Kreis im Raum: von einem Kreis k im Raum seien der Mittelpunkt M(3|-6|2) und der Radius r=10 bekannt, zudem stehe die Kreisebene senkrecht zum Vektor mit den Koordinaten (4|3|12). Berechnen Sie eine Gleichung der Kreisebene und zeigen Sie, dass der Punkt A(-3|2|2) auf k liegt. Bestimmen Sie dann eine Gleichung der Kreistangente in A.

Aufgabe a)

k: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; $M(2 \mid 1)$, $r=5$

Schnitt mit g: $y=2x-8$ (Gleichung von g einsetzen):

$$(x-2)^2+(2x-8-1)^2=25$$
$$5x^2-40x+60=0$$
$$x^2-8x+12=0$$
$$(x-6)(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=6, \quad x_2=2$$

g schneidet den Kreis in $P(6 \mid 4)$ und $Q(2 \mid -4)$.

Berührungsradius $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ Tangente $4x+3y=36$

Berührungsradius $\overrightarrow{MQ}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ Tangente $y=-4$

Aufgabe b)

Ebene des Kreises: $4x + 3y + 12z = 12 - 18 + 24 = 18$

Zu zeigen ist:

$A \in E$: $\quad -12 + 6 + 24 = 18$

Abstand MA ist 10: $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{MA}| = 10$

Die Tangente steht senkrecht auf dem Berührungsradius $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

und liegt in der Kreisebene, steht also senkrecht zu deren Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 72 \\ -50 \end{pmatrix} \quad /\!/ \quad \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Kreistangente in A ist: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \\ -25 \end{pmatrix}$