Eine Kugel mit Radius 5 rollt auf der xy-Ebene umher, bis sie in einem Loch stecken bleibt, das durch die Gleichung $x^2+10x+y^2-12y+52=0$ beschrieben wird.

a) Beschreiben Sie Form, Grösse und Lage dieses Lochs.

b) Geben Sie die Gleichung der darin steckenden Kugel an.

Eine zweite Kugel hat die Gleichung $x^2-2x+y^2+18y+z^2-28z+197=0$.

Sie wird vom Punkt (5|-26|0) aus mit einem Laserstrahl mit der Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ durchbohrt.

c) Berechnen Sie Eintritts- und Austrittspunkt des Strahls.

d) Berechnen Sie die kleinste Entfernung der beiden Kugeln.

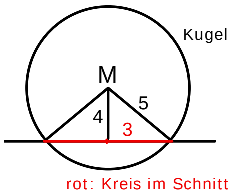
[Matur TSME, 2000, Flü]

---

a) Es handelt sich um einen Kreis: $M(-5 \mid 6)$ bzw. $M(-5 \mid 6 \mid 0)$ und $r = 3$

$$x^2 + 10x + y^2 - 12y + 52 = 0$$
$$(x+5)^2 + (y-6)^2 = 9$$

b)



Kugelgleichung: $(x+5)^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 25$

c) Die Mittelpunktsform ist für diese Aufgabe bequemer und wird für d) sowieso benötigt:

$$x^2 - 2x + y^2 + 18y + z^2 - 28z + 197 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+9)^2 + (z-14)^2 = 81$$

Dem Laserstrahl entspricht die Geradengleichung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir schneiden Gerade und Kugel:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+9)^2 + (z-14)^2 &= 81 \\ (5-1)^2 + (-26+3t+9)^2 + (t-14)^2 &= 81 \\ (4)^2 + (3t-17)^2 + (t-14)^2 &= 81 \\ t^2 - 13t + 42 &= 0 \\ (t-6)(t-7) &= 0 \end{aligned}$$

und gewinnen so die Schnittpunkte: $t = 6$ $\quad$ $\mathbf{P_1\,(5 \mid -8 \mid 6)}$
$t = 7$ $\quad$ $\mathbf{P_2\,(5 \mid -5 \mid 7)}$

d) die kleinste Entfernung ergibt sich aus den Radien und der Distanz M_1M_2:

$M_1\,(-5 \mid 6 \mid 4)$ $\quad$ $r_1 = 5$
$M_2\,(1 \mid -9 \mid 14)$ $\quad$ $r_2 = 9$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad M_1M_2 = \sqrt{36 + 225 + 100} = 19$$

Die kleinste Entfernung ist: $\mathbf{d} = 19 - 5 - 9 = \mathbf{5}$