[TSME, Vorprüfung BDE, 1999]

Gegeben sind die Kreise: $k_1: \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

$k_2: \quad x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$

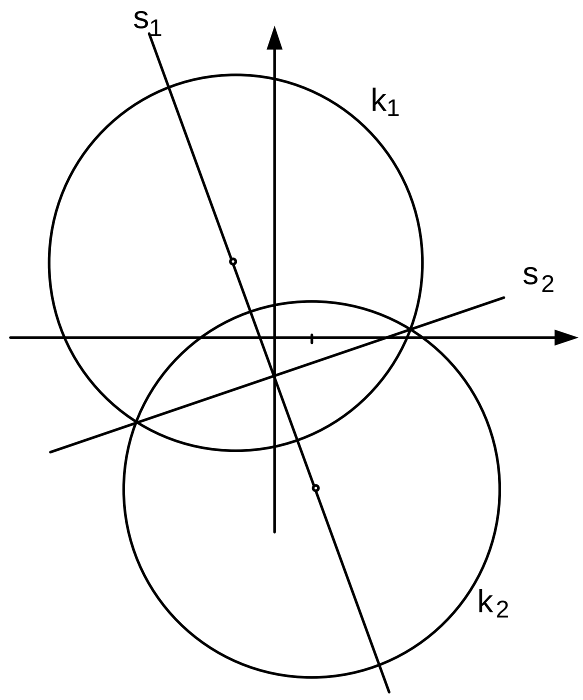
a) Zeigen Sie, dass die Kreise gleich gross sind und erstellen Sie eine saubere Zeichnung (Einheit: 1 Häuschen).

b) Stellen Sie die Gleichungen der Spiegelachsen auf.

c) Ein weiterer gleich grosser Kreis soll die Kreise k_1 und k_2 berühren.
Berechnen Sie seinen Mittelpunkt.

---

a) Kreisgleichungen umformen:



$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25 \qquad M_1(-1|2) \qquad r_1 = 5$

$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 25 \qquad M_2(1|-4) \qquad r_2 = 5$

b) Spiegelachse durch M_1M_2:

$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad s_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die 2. Spiegelachse geht durch den Mittelpunkt $M(0|-1)$ von M_1M_2 und steht normal auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$:

$s_2: \quad x - 3y = 3$

(Man könnte s_2 auch als Schnittgerade der Kreise durch Subtraktion der Kreisgleichungen bestimmen.)

c) Wir ziehen um M_1 einen Kreis mit $r = 5 + 5 = 10$: $\qquad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 100$

und bestimmen seine Schnittpunkte mit s_2: $\qquad x = 3 + 3y$

$$(3 + 3y + 1)^2 + (y-2)^2 = 100$$
$$(3y+4)^2 + (y-2)^2 = 100$$
$$10y^2 + 20y - 80 = 0$$
$$y^2 + 2y - 8 = 0$$
$$(y+4)(y-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -4, \quad y_2 = 2$$

Es ergeben sich zwei mögliche Kreise; die Mittelpunkte sind: $M'(-9|-4)$, $\quad M''(9|2)$