Zeigen Sie, dass sich die Kugeln K_1 und K_2 berühren, und stellen Sie die Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene in diesem Punkte auf.

$K_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0 \qquad K_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 81$

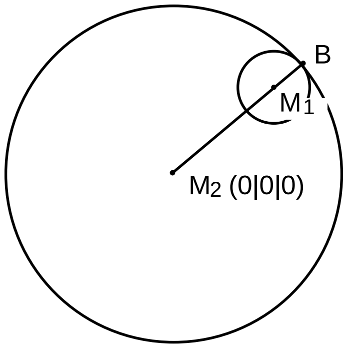
Um die gegenseitige Lage der Kugeln abzuklären benötigt man ihre Radien und die Entfernung ihrer Mittelpunkte.

$K_1 \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2 = -45 + 4 + 36 + 9$$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2 = 4 \qquad M_1\,(2|6|-3), \quad r_1 = 2$$

$K_2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 81 \qquad M_2\,(0|0|0), \quad r_2 = 9$



Daraus gewinnt man:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{M_2M_1}| = \sqrt{4+36+9} = 7$$

Der Vergleich zeigt, dass $|\overrightarrow{M_2M_1}| = 7 = r_2 - r_1$

Der Vektor $\overrightarrow{M_2M_1}$ hat, wie eben festgestellt, die Länge 7, der Vektor $\overrightarrow{M_2B}$ muss die Länge 9 haben;

also gilt: $\overrightarrow{M_2B} = \dfrac{9}{7}\,\overrightarrow{M_2M_1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{7} \\ \frac{54}{7} \\ \frac{-27}{7} \end{pmatrix}$ und da $\overrightarrow{M_2B}$ ein Ortsvektor ist gilt: $B\left(\frac{18}{7}\middle|\frac{54}{7}\middle|\frac{-27}{7}\right)$

Die Tangentialebene steht normal (rechtwinklig) auf $\overrightarrow{M_2M_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$:

Gleichung der Tangentialebene: $\quad 2x + 6y - 3z = \frac{36}{7} + \frac{324}{7} + \frac{81}{7}$

$\frac{18}{7} \quad \frac{36}{7} \quad \frac{-27}{7}$

$$\mathbf{2x + 6y - 3z = 63}$$