[Matur TSME, 1997, Flü

Gegeben sind zwei Geraden und ein Kreis:

a: $3x-4y=18$

b: $3x+4y=50$

k: $x^2-24x+y^2+8y+135=0$

a) Sorgfältige Zeichnung (Einheit 1 Häuschen)

b) Schnittpunkte A und B der Geraden mit der y-Achse, sowie Schnittpunkt S der Geraden a und b.

c) In welchen Punkten schneidet der Kreis k die x-Achse?

d) Ein Kreis k' ist gleich gross wie k, liegt im Dreieck ABS und berührt die Geraden a und b. Wie heisst seine Gleichung?

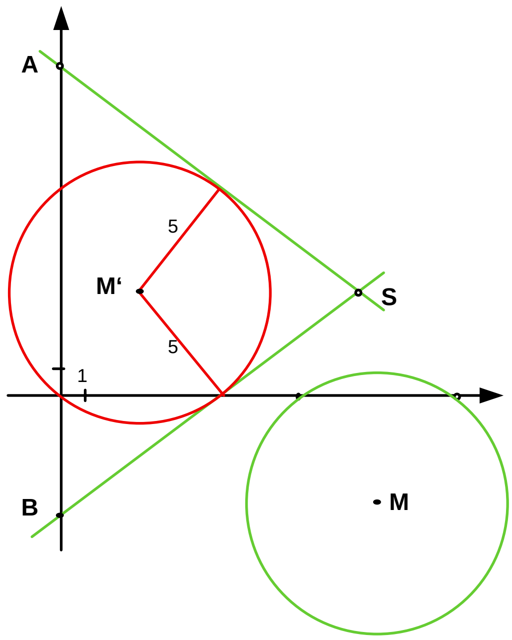
---

a) Die Geraden: $y = \frac{3}{4}x - 4.5$

$y = -\frac{3}{4}x + 12.5$

Der Kreis: $(x-12)^2 + (y+4)^2 = 25$

$M(12 \mid -4), \quad r = 5$



b) Die Geraden schneiden die y-Achse in: $A(0 \mid -4.5)$ und $B(0 \mid 12.5)$.

Schnittpunkt der Geraden:

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 4y = 50 \\ 3x - 4y = 18 \end{array} \right|$$

Addition ergibt: $6x = 68 \Rightarrow x = 11\frac{1}{3}$

Subtraktion ergibt: $8y = 32 \Rightarrow y = 4$ $\qquad S(11\frac{1}{3} \mid 4)$

c) $y=0$ $$(x-12)^2+4^2=25$$
$$(x-12)^2=9$$
$$x-12=\pm 3 \qquad P_1(15 \mid 0),\ \ P_2(9 \mid 0)$$

d) Wir benötigen einen Punkt $(u \mid v)$, der von beiden Geraden den Abstand 5 hat.

Aus der Zeichnung entnehmen wir, dass der gesucht Punkt sowohl von a wie auch von b aus gesehen auf der gleichen Seite wie der Nullpunkt liegt;

Abstände berechnet man mit den Hesseschen Normalenformeln:

$$d=\frac{3x_0-4y_0-18}{5} \quad \text{bzw.} \quad d=\frac{3x_0-4y_0-50}{5}$$

Für den Nullpunkt ergeben sich beide Male negative Ergebnisse, also gilt:

$$\frac{3u-4v-18}{5}=-5 \qquad \text{und} \qquad \frac{3u+4v-50}{5}=-5$$
$$3u-4v=-7 \qquad\qquad 3u+4v=25$$

Das Gleichungssystem $\left|\begin{array}{l} 3u+4v=25 \\ 3u-4v=-7 \end{array}\right|$ hat die Lösung $M'(3 \mid 4)$.