a) Eine Kugel K_1 hat ihren Mittelpunkt auf der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und geht durch die Punkte A(6|-1|8) und B(-2|7|8) .
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Kugel (in Mittelpunktsform).

b) Eine Ebene E ist durch die Punkte R(3|4|6). S(-2|-3|30) und T(5|-5|20) gegeben.
Geben Sie die Achsenschnittpunkte dieser Ebene an.
Es gibt zwei Tangentialebenen an die Kugel K_1, die parallel zu E sind.
Berechnen Sie die Gleichung derjenigen, die näher bei E liegt.

---

a) Der Mittelpunkt einer Kugel, die durch A und B geht, liegt auf der Symmetrieebene der beiden Punkte:

Mittelpunkt von AB: $\left(\frac{6-2}{2} \middle| \frac{-1+7}{2} \middle| \frac{8+8}{2} \right) = (2|3|8)$

Normalenvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \,//\, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalebene: $x - y = -1$

Schnitt mit der Geraden g: $(-1 + t) - (-3 + 2t) = -1$

$$3 = t$$

$$M(2|3|1) \qquad \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 16 + 16 + 49 = 81$$

Gleichung der gesuchten Kugel: $\mathbf{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 81}$

b) Gleichung der Ebene E:

$$\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 24 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 \\ 118 \\ 59 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E: 2x + 2y + z = 20$$

Wir dividieren E durch die rechte Seite und erhalten: $\frac{x}{10} + \frac{y}{10} + \frac{z}{20} = 1$

Die Achsenschnittpunkte sind: $(10|0|0)$, $(0|10|0)$, $(0|0|20)$

Nun legen wir eine Normale zu E durch M: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und schneiden sie mit der Kugel K_1: $(2t)^2 + (2t)^2 + t^2 = 81$

$$t = \pm 3$$

$B_1(8|9|4)$ $\quad T_1$: $\mathbf{2x + 2y + z = 38}$

$B_2(-4|-3|-2)$ $\quad T_2$: $2x + 2y + z = -16$

Ein Vergleich der konstanten Glieder der drei Ebenen (28, 20, -16) zeigt, dass die Ebene T_1 näher bei E liegt.