Eine Ebene hat die Gleichung E: $4x+5y+20z=80$ und alle Kugeln sind gleich gross.

---

a) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene E gegenüber der xy-Ebene:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 20 = 21 \cdot 1 \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = 17.75^{o}$$

b) Die rote Kugel mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2-10x+40y-100z+2484=0$ fällt senkrecht, d. h. parallel zur z-Achse, nach unten und hinterlässt in der Ebene E ein Loch in Form einer Ellipse. Wo ist der Mittelpunkt des Lochs? Wie gross ist der kleinste Durchmesser des Lochs?

Der Mittelpunkt der Kugel steht vertikal über dem Mittelpunkt des Lochs:

K_{rot}: $(x-5)^2 + (y+20)^2 + (z-50)^2 = 441 = 21^2$ $\quad$ $M(5 \mid -20 \mid 50)$ und $r = 21$

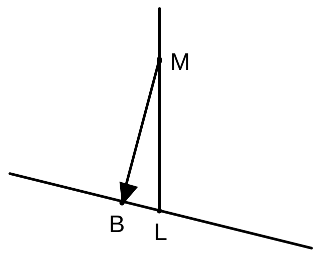
Parallele zur z-Achse durch M: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \\ 50 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $\quad 4 \cdot 5 + 5 \cdot (-20) + 20 \cdot (50 + t) = 80$

$t = -42$

Das Loch ist in $\mathbf{L(5 \mid -20 \mid 8)}$,
der kleinste Durchmesser ist gleich dem Kugeldurchmesser: $\mathbf{d} = \mathbf{42}$

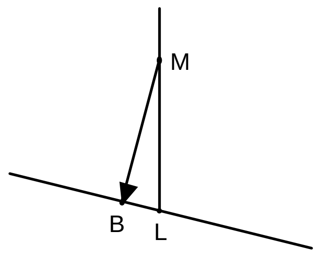
c) Nun fällt die blaue Kugel mit Mittelpunkt (19|-3|50) und Radius 21 herunter.
Wo ist der Mittelpunkt der Kugel, wenn sie die Ebene zum ersten Mal berührt und wo ist der Berührungspunkt? (Gute Skizze empfehlenswert!)



$M(19|-3|z)$ (die Kugel fällt parallel zur z-Achse!) muss den Abstand 21 von der Ebene E haben:

$$\frac{4\cdot 19+5\cdot(-3)+20\cdot z-80}{21}=21 \quad\Rightarrow\quad z=23$$

Der Mittelpunkt ist in **M (19 | −3 | 23)**.



$M(19|-3|z)$ (die Kugel fällt parallel zur y-Achse!) muss den Abstand 21 von der Ebene E haben:

$$\frac{4\cdot 19+5\cdot(-3)+20\cdot z-80}{21}=21 \quad\Rightarrow\quad z=23$$

Der Mittelpunkt ist in **M (19 | −3 | 23)**.

Gerade rechtwinklig zur Ebene E durch M: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\-3\\23\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\20\end{pmatrix}$

Schnitt mit der Ebene: $4(19+4t)+5(-3+5t)+20(23+20t)=80$

$t=-1$ **B (15 | −8 | 3)**

d) Die grüne Kugel berührt die Ebene E im Punkt (30|-24|z) und rollt auf dem kürzesten Weg die Ebene herunter.
Berechnen Sie die Achsenabschnitte der Ebene und die Gleichung der Schnittgeraden von E mit der xy-Ebene.
Beschreiben Sie die Gerade, auf der die Kugel nach unten rollt, in Worten und berechne eine Gleichung dieser Geraden.

Die dritte Koordinate des Berührungspunktes erhält man, indem man die Koordinaten des Punktes in E einsetzt:

$$4\cdot 30+5\cdot(-24)+20\cdot z=80 \quad\Rightarrow\quad z=4 \quad\Rightarrow\quad B\ (30\ |\ -24\ |\ 4)$$

Achsenabschnitte der Ebene:

$$4x+5y+20z=80 \quad \big|\ :80$$
$$\frac{x}{20}+\frac{y}{16}+\frac{z}{4}=1$$

Achsenabschnitte: $S_x\ (20\ |\ 0\ |\ 0)$, $S_y\ (0\ |\ 16\ |\ 0)$, $S_z\ (0\ |\ 0\ |\ 4)$

Die Schnittgerade geht durch S_x und S_y: $\overrightarrow{S_xS_y}=\begin{pmatrix}-20\\16\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad s: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}$

Die Fallgerade f ist rechtwinklig zur Spurgeraden s und - weil sie in der Ebene E liegt - ist sie auch rechtwinklig zum Normalenvektor der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -100 \\ 41 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 41 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f:} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{30} \\ -\mathbf{24} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{80} \\ \mathbf{100} \\ -\mathbf{41} \end{pmatrix}$$

e) Die gelbe Kugel schliesslich rollt auf der Geraden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 \\ -92 \\ 41 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ -41 \end{pmatrix}$ nach unten.

Wie heisst die Gleichung der Geraden, auf der sie in der xy-Ebene weiterrollt?

Schnitt der "Rollgeraden" mit der xy-Ebene:

$$z = 0 = 41 - 41t \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad (10 \mid 8 \mid 0)$$

Die Gerade in der Ebene "fällt" nicht mehr, $z = 0$, die übrigen Richtungen werden beibehalten:

$$\begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ -41 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichung der gesuchten Geraden: $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.