[TSME, Matur BDE, 1990]
Gegeben wird die Kugel k_1: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+2=0$.
Eine zweite Kugel k_2 entsteht aus der ersten Kugel k_1 durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}$; der Mittelpunkt M_2 der Kugel k_2 soll auf der Oberfläche von k_1 liegen.

a) Bestimme denjenigen Verschiebungsvektor $\vec{v}$, für welchen $k>0$ gilt.
b) k_1 und k_2 schneiden sich in einem Kreis k. Ermittle die Koordinaten des Mittelpunktes N, den Radius r von k und die Gleichung der Kreisebene E
c) Wie lauten die Gleichungen der vier Tangentialebenen beider Kugeln, welche zur Ebene E des Schnittkreises parallel sind?

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 2 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = -2 + 1 + 4 + 9 = 12 \qquad M_1(1 \mid 2 \mid 3), \quad r = \sqrt{12}$$

a) Schnitt der Kugel k_1 mit der Geraden durch den Mittelpunkt mit der Richtung $\vec{v}$:

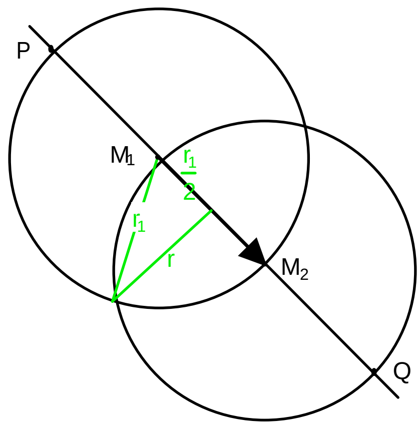
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix} \qquad k^2 + k^2 + k^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad M_2(3 \mid 4 \mid 1)$$

b) N ist der Mittelpunkt der Strecke M_1M_2:

$N(2 \mid 3 \mid 2)$

Den Radius r berechnet man nach Pythagoras:

$$r^2 = \left(\sqrt{12}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{12}\right)^2 = 12 - 3 = 9$$
$$r = 3$$



Die Ebene steht normal auf $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$:•

$$x + y - z = 3$$

c) Die Berührungspunkte ergeben sich aus der Geradengleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}$

für:

$k = 0$	$M_1\ (1 \mid 2 \mid 3)$
$k = 1$	$M_2\ (3 \mid 4 \mid 1)$
$k = -1$	$P\ (-1 \mid 0 \mid 5)$
$k = 2$	$Q\ (5 \mid 6 \mid -1)$

daraus ergeben sich die Gleichungen der Tangentialebenen:

$x + y - z = 0$
$x + y - z = 6$
$x + y - z = -6$
$x + y - z = 12$