ABSTAND PUNKT – GERADE

1. Art

Gerade: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; Punkt: $P(0 \,|\, 13 \,|\, 20)$

Bestimmen Sie Abstand und Lotfusspunkt.

Geometrische Lösung:

Wir legen eine Ebene E senkrecht zur Geraden g durch den Punkt P:

$$E: \quad 5x + y + 4z = 0 + 13 + 80 \quad \Rightarrow \quad 5x + y + 4z = 93$$

Und schneiden Sie mit der Geraden g:

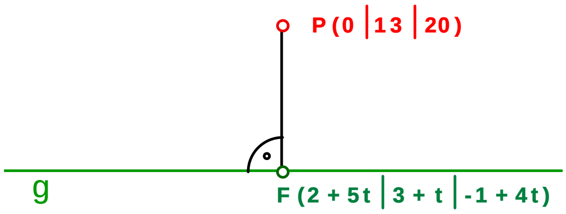
$$\begin{aligned} 5(2+5t) + (3+t) + 4(-1+4t) &= 93 \\ 10 + 25t + 3 + t - 4 + 16t &= 93 \\ 42t &= 84 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad F(12 \,|\, 5 \,|\, 7) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = \sqrt{12^2 + 8^2 + 13^2} = \sqrt{\mathbf{377}}$$

2. Art

Gerade: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; Punkt: $P(0\,|\,13\,|\,20)$

Bestimmen Sie Abstand und Lotfusspunkt.



$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 2+5t \\ 3+\ \ t \\ -1+4t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t+\ \ 2 \\ t-10 \\ 4t-21 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 5t+\ \ 2 \\ t-10 \\ 4t-21 \end{pmatrix}$ muss senkrecht auf der Geraden, d.h. senkrecht auf $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ stehen,

das Skalarprodukt ist Null:

$$\begin{pmatrix} 5t+\ \ 2 \\ t-10 \\ 4t-21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 42t - 84 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad F(12\,|\,5\,|\,7)$$

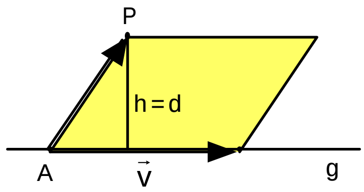
$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = \sqrt{12^2 + 8^2 + 13^2} = \sqrt{\mathbf{377}}$$

3. Art

Empfehlenswert, wenn der Lotfusspunkt nicht gesucht wird; in derartigen Fällen ist es gut möglich, dass die Koordinaten dieses Lotfusspunktes keine "schönen" Zahlen ergeben.

Merken Sie sich bei diesem Aufgabentyp nicht Formeln, sondern die dazugehörige Figur
und Idee!

Die Gerade ist durch einen Punkt A und den Richtungsvektor $\vec{v}$ gegeben.
Die Fläche F des Parallelogramms lässt sich aus $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ mit dem Vektorprodukt berechnen.
Die Grundlinie ist $g = \left|\vec{v}\right|$

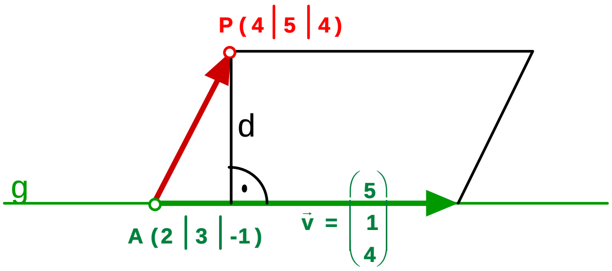


Aus $F = g \cdot h$ ergibt sich: $d = h = \dfrac{F}{g}$

Zahlenbeispiel:

Gerade: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; Punkt: $P(4|5|4)$

Figur:



$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt: $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Fläche: $F = \sqrt{3^2 + 17^2 + (-8)^2} = \sqrt{362}$

Grundlinie: $|\vec{v}| = \sqrt{25 + 1 + 16} = \sqrt{42}$

Abstand: $\mathbf{d} = \dfrac{\sqrt{362}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{181}}{\mathbf{21}}}$

Den Lotfusspunkt erhielte man für $t = -\frac{3}{7}$!