Abstand zweier Geraden

Parallele Geraden

Man berechne den Abstand eines beliebigen Punktes des einen Geraden von der anderen Geraden (s. Abstand Punkt / Gerade)

Windschiefe Geraden

Nennen wir die Geraden g und h.

g geht durch den Punkt G und hat den Richtungsvektor $\vec{g}$

h geht durch den Punkt H und hat den Richtungsvektor $\vec{h}$

Der Punkt G und die Vektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ bestimmen die Gleichung einer Ebene E, die die Gerade g enthält und zur Geraden h parallel ist.

Der Abstand des Punktes H von dieser Ebene E entspricht dem Abstand (kürzeste Verbindung) der beiden windschiefen Geraden.

Ein Zahlenbeispiel

$$g:\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h:\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der Ebene ist: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Ebene gehe durch $(5\,|\,-1\,|\,0)$: $\quad x + 2y + 2z = 3 \quad \Rightarrow \quad$ HNF: $\dfrac{x + 2y + 2z - 3}{3} = 0$

Abstand des Punktes $(0\,|\,0\,|\,3)$ von dieser Ebene: $\quad d = \dfrac{0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot \mathbf{3} - 3}{3} = 1$